

ВЫПУСК

126

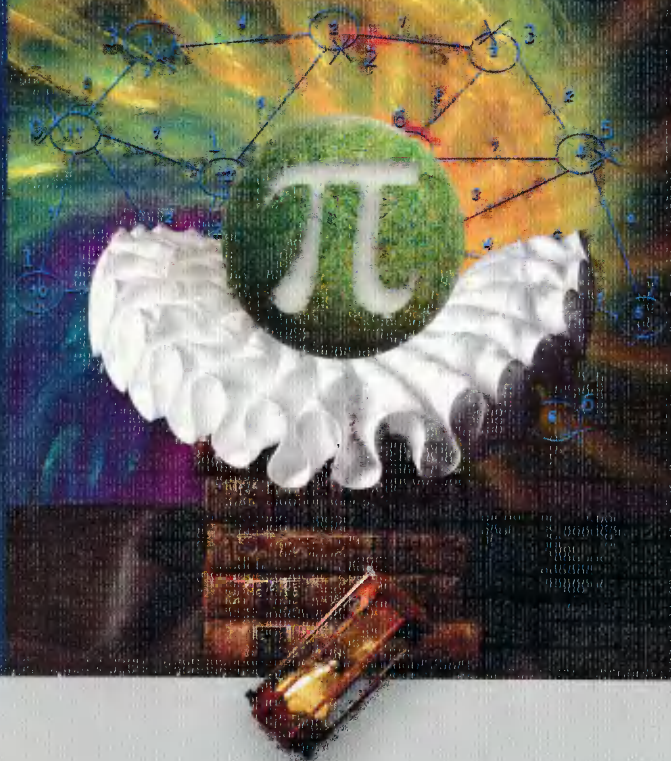


# Библиотечка КВАНТ

Н.Б. ВАСИЛЬЕВ

Статьи из журнала «КВАНТ»

Часть 2



Библиотечка КВАНТ

126



БИБЛИОТЕЧКА  
**КВАНТ**  
ВЫПУСК

**126**

Приложение к журналу  
«Квант» №2/2013

**Н.Б. Васильев**

СТАТЬИ ИЗ ЖУРНАЛА

«КВАНТ»

**Часть 2**

Москва  
Издательство МЦНМО  
2013

УДК 51(019)  
ББК 22.1г  
В19

Серия «Библиотечка «Квант»  
основана в 1980 году

Редакционная коллегия:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев,  
М.И.Каганов, С.С.Кротов, С.П.Новиков, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов,  
А.И.Черноуцан

В19 Васильев Н.Б.  
**Статьи из журнала «Квант».** Часть 2. – М.: Издательство  
МЦНМО, 2013. – с. 160 (Библиотечка «Квант». Вып. 126.  
Приложение к журналу «Квант» №2/2013.)

ISBN 978-5-4439-0314-9

Книга представляет собой сборник статей одного из лучших авторов «Кванта» Н.Б.Васильева, опубликованных в журнале в разные годы. Статьи сборника посвящены самым разным разделам математики, их содержание иногда выходит за рамки школьной программы, но изложение доступно школьникам старших классов.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для руководителей и участников математических кружков, а также для всех, кто интересуется математикой.

ББК 22.1г

ISBN 978-5-4439-0314-9



9 785443 903149 >

## ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ

В этой статье мы обсудим полезную формулу, выражающую площадь многоугольника через координаты его вершин. При подготовке статьи использовано письмо А. Старцева, присланное в «Квант» в 1970 году.

### Комбинации трапеций

Пусть дан многоугольник, расположенный в положительном квадранте  $x > 0$ ,  $y > 0$  и к тому же выпуклый. Занумеруем его вершины против часовой стрелки:  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$ , ..., как показано на рисунке 1, где число вершин  $n = 5$ . Опустим из всех вершин перпендикуляры  $A_1H_1$ ,  $A_2H_2$ , ...,  $A_nH_n$  на ось  $x$ ; их длины равны  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Площадь трапеции  $A_kH_kH_{k+1}A_{k+1}$  равна модулю произведения  $(y_k + y_{k+1})(x_k - x_{k+1})/2$ . Это произведение положительно при  $x_k > x_{k+1}$  и отрицательно при  $x_k < x_{k+1}$  (здесь  $k$  — одно из чисел 1, 2, ...,  $n$ , причем следующий за  $n$  номер  $n + 1$  надо заменить на 1). Замечательным образом оказывается, что сумма всех  $n$  таких однотипных произведений как раз равна площади многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$ . Например, для пятиугольника на рисунке 1 из пяти произведений

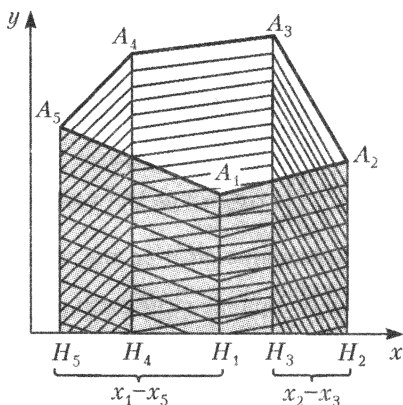


Рис. 1

из пяти произведений

$$\frac{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)}{2}, \quad \frac{(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)}{2}, \quad \frac{(y_3 + y_4)(x_3 - x_4)}{2},$$

$$\frac{(y_4 + y_5)(x_4 - x_5)}{2}, \quad \frac{(y_5 + y_1)(x_5 - x_1)}{2}$$

Статья написана в соавторстве с В. Гутенмахером.

три, соответствующие верхним сторонам (подчеркнутые), положительны, а два, соответствующие нижним сторонам, отрицательны; вычитая из суммы площадей трапеций, соответствующих верхним сторонам, сумму площадей трапеций, соответствующих нижним сторонам, найдем площадь пятиугольника.

Полученную сумму можно несколько упростить, сократив произведения  $x_1y_1, x_2y_2, \dots$

$$S = \frac{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)}{2} + \frac{(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)}{2} + \frac{(y_3 + y_4)(x_3 - x_4)}{2} + \\ + \frac{(y_4 + y_5)(x_4 - x_5)}{2} + \frac{(y_5 + y_1)(x_5 - x_1)}{2} = \\ = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \dots + (x_5y_1 - x_1y_5)}{2}.$$

**Упражнение 1.** Выведите формулу площади выпуклого  $n$ -угольника при любом  $n$ .

### Основная формула

Итак, площадь  $S$  выпуклого  $n$ -угольника с вершинами  $A_k(x_k; y_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , равна

$$\frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \dots + (x_ny_1 - x_1y_n)]. \quad (1)$$

Выражение  $ad - bc$  так часто встречается в математике, что для него принято специальное обозначение  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  и название «определитель второго порядка»; с помощью таких определителей формулу площади можно записать компактнее:

$$S = \frac{\begin{vmatrix} x_1x_2 \\ y_1y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2x_3 \\ y_2y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_nx_1 \\ y_ny_1 \end{vmatrix}}{2}.$$

(Для запоминания формулы (1) удобен рисунок 2. Заметим, что формула (1) предполагает, что вершины занумерованы против часовой стрелки.)

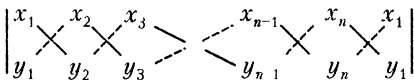


Рис. 2. Произведения чисел, соединенных сплошным отрезком, берутся со знаком «+», а пунктирным — со знаком «-»

**Упражнение 2.** Проверьте, что если занумеровать вершины в обратном порядке — по часовой стрелке, то каждая круглая скобка, соответствующая определенной стороне

многоугольника:  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ , изменит знак. Тот же эффект будет, если поменять местами привычные обозначения осей – изменить *ориентацию* плоскости.

Чтобы не заботиться о том или ином направлении нумерации вершин, вместо квадратных скобок в формуле (1) можно поставить знак модуля. Полученная формула

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \right| \quad (2)$$

годится для любого случая. (Напомним еще раз, что  $y_{n+1}$  и  $x_{n+1}$  следует заменить на  $y_1$  и  $x_1$ .)

Заметим, что пока мы считали все координаты вершин многоугольника положительными, а сам многоугольник – выпуклым. Было бы очень обидно и удивительно, если бы наша формула оказалась верной лишь при таком дополнительном предположении. К счастью, это не так: *формула справедлива для любого многоугольника на плоскости*. Как доказать ее для невыпуклого многоугольника, мы обсудим ниже – в упражнении 13. А сейчас мы избавимся от предположения, что многоугольник расположен внутри угла  $x > 0, y > 0$ .

**Упражнение 3.** Проверьте, что правая часть формулы (2) не изменится, если:

- а) каждое  $x_k$  заменить на  $x_k + a$ ;
- б) каждое  $y_k$  заменить на  $y_k + b$ .

Любой многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$  мы можем параллельно перенести на некоторый вектор  $(a; b)$  в угол  $x > 0, y > 0$ . При этом координаты его вершин изменяются, но не меняются ни его площадь – левая часть формулы (2), ни правая часть этой формулы. Поскольку для полученного многоугольника с положительными координатами вершин равенство (2) верно, оно будет верным и для исходного многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$ .

### Упражнения

4. Найдите по формуле (2) площади четырехугольников с вершинами:

- а) (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1);    б) (0; 0), (–1; 1), (2; 3), (1; 2);
- в) (0; 5), (3; 0), (0; –4), (2; 0). Проверьте ответ, найдя эту площадь другим способом.

5. а) Запишите формулу для площади треугольника с вершинами (0; 0),  $(a; b)$ ,  $(c; d)$ .

б) При каком условии три точки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  лежат на одной прямой?

## Комбинации треугольников

Основную формулу (2) можно вывести иначе – так, что будет ясен геометрический смысл каждого слагаемого  $(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)/2$  (заметим, что в него входят координаты только двух соседних точек  $A_k$  и  $A_{k+1}$ ). Мы по-прежнему можем считать, что  $x_k > 0$ ,  $y_k > 0$ .

Оказывается, выражение  $(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)/2$  равно по модулю площади треугольника  $OA_k A_{k+1}$ , причем положительно, если отрезок  $OA_{k+1}$  составляет больший угол с осью  $x$ , чем  $OA_k$ , и отрицательно, если меньший.

**Упражнение 6.** Пусть  $B(x_1; y_1)$  и  $C(x_2; y_2)$  – две точки с положительными координатами, причем  $y_1/x_1 < y_2/x_2$ . Тогда площадь параллелограмма  $OBDC$  (рис.3) равна  $x_1 y_2 - x_2 y_1$ .

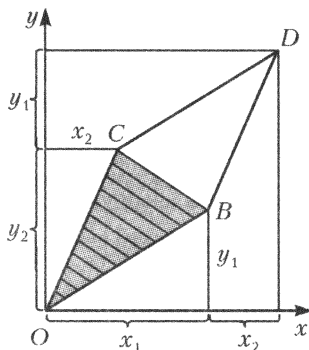


Рис. 3

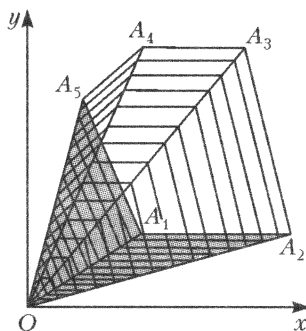


Рис. 4

Теперь ясно, что сумма  $n$  членов  $(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)/2$  даст нужную площадь  $n$ -угольника (рис. 4; из суммы площадей треугольников, соответствующих верхним сторонам, мы вычтем сумму площадей треугольников, соответствующих нижним сторонам, – это удачное совпадение знаков уже встречалось нам в рассуждениях с трапециями).

**Упражнение 7.** Проверьте, что геометрический смысл выражения  $x_1 y_2 - x_2 y_1$  для точек  $B(x_1; y_1)$ ,  $C(x_2; y_2)$  с координатами любого знака – это *ориентированная площадь* параллелограмма  $OBDC$ , построенного на векторах  $\overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OC}$ <sup>1</sup>: площадь  $OBDC$  берется со знаком «плюс»,

<sup>1</sup> См. также статью А.Лопшица «Площади ориентированных фигур» («Квант» № 3 за 1978 г.).

если направление  $\overline{OC}$  получается из направления  $\overline{OB}$  вращением против часовой стрелки (на угол не больше  $180^\circ$ ), и «минус», если по часовой стрелке.

### Дополнительные задачи и комментарии

В заключение предлагаем доказать еще несколько утверждений, связанных с формулой площади многоугольника, ее доказательствами и обобщениями.

#### Упражнения

8. Для двух векторов  $\vec{b} = \overline{OB}$ ,  $\vec{c} = \overline{OC}$  на плоскости будем обозначать ориентированную площадь параллелограмма  $OBDC$  (упражнение 7) через  $\vec{b} \wedge \vec{c}$ .

Тогда для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и любого числа  $\lambda$  выполнены равенства:

$$1^\circ. \vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a}).$$

$$2^\circ. \lambda \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

3°.  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

$$4^\circ. \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}.$$

Величину  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  называют иногда *псевдоскалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$* .

9. Найдя координаты точек  $A, B$  пересечения прямой  $ax + by + c = 0$  с осями координат ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ) и площадь треугольника  $ABM_0$ , где  $M_0(x_0; y_0)$ , выведите формулу для расстояния от точки  $M_0$  до данной прямой:

$$|ax_0 + by_0 + c| / \sqrt{a^2 + b^2}.$$

10. а) Пусть вершины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  многоугольника двигаются по плоскости прямолинейно и равномерно (каждая — со своей постоянной скоростью). Докажите, что площадь многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$  меняется со временем  $t$  как модуль квадратного трехчлена от  $t$ .<sup>2</sup>

б) Рассмотрим произвольный *призموид* высоты  $h$  — наименьший выпуклый многогранник, содержащий два основания — выпуклые многоугольники  $M_0$  и  $M_1$ , лежащие в параллельных плоскостях  $\pi_0$  и  $\pi_1$ , отстоящих на расстоянии  $h$  друг от друга. Пусть  $S_t$  — площадь сечения этого призмоида плоскостью, параллельной  $\pi_0$  и отстоящей от нее на  $th$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Докажите, что  $S_t$  — квадратный трехчлен от  $t$ .

в) Докажите *формулу Симпсона*: объем призмоида равен

$$V = (S_0 + 4S_{1/2} + S_1)h/6,$$

<sup>2</sup> Этот факт неоднократно использовался в «Кванте» (см., например, статью *Н. Васильева* «Семейство параллельных  $n$ -угольников» — см. «Квант» № 11 за 1974 г. или первую часть настоящего сборника).



где  $S_0$  и  $S_1$  – площади его оснований, а  $S_{1/2}$  – площадь среднего сечения.

**11\*.** Пусть все грани выпуклого многогранника – треугольники. Докажите, что его объем можно найти как сумму

$$\frac{1}{6} \sum \begin{vmatrix} x_i x_j x_k \\ y_i y_j y_k \\ z_i z_j z_k \end{vmatrix}$$

по всем его граням  $\Delta A_i A_j A_k$ , где  $A_i(x_i; y_i; z_i)$  – вершина многогранника, а «определитель третьего порядка» вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \\ z_1 z_2 z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1,$$

причем выписывать каждый определитель надо, глядя на грань  $A_i A_j A_k$  из точки  $(0; 0; 0)$ : координаты вершин видимых граней – по часовой стрелке, невидимых – против нее.

**12.** а) Проверьте с помощью формулы (2), что при гомотетии с коэффициентом  $k$  площадь увеличивается в  $k^2$  раз, а при симметриях  $(x; y) \rightarrow (-x; y)$ ,  $(x; y) \rightarrow (x; -y)$ ,  $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$  она не меняется.

б\*) Проверьте, что при преобразованиях плоскости  $(x; y) \rightarrow (x'; y')$ , где

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi,$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

площадь многоугольника не меняется. (Это преобразование – поворот на угол  $\varphi$  вокруг начала координат.)

в) То же – для преобразования  $x' = kx$ ,  $y' = y/k$  ( $k$  – фиксированное число); это – так называемый *гиперболический поворот*.

г) Во сколько раз изменяется площадь при преобразовании  $x' = ax + by$ ,  $y' = cx + dy$ ? (Ответ. Этот коэффициент один и тот же для всех многоугольников; он равен модулю определителя  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ .)

**13.** Формула (2) верна и для невыпуклого многоугольника. Чтобы доказать ее, удобно использовать такую **лемму**: Пусть  $MP$  – луч, выходящий из некоторой точки  $M$ . Если  $M$  лежит вне многоугольника, то, обходя многоугольник против часовой стрелки, мы пересечем луч  $MP$  четное число раз (поровну – справа налево и слева направо); если же точка  $M$  лежит внутри многоугольника, то – нечетное число раз (справа налево – на один раз больше).

**14.** Пусть многоугольник разрезан ломаной линией на две части. Проверьте, что площади, определенные по формуле (2) для каждой из частей, в сумме дают выражение (2) для всего многоугольника.

Этот факт (аддитивность) вместе с результатами упражнений 3 и 12 а), б) (инвариантность относительно переносов, симметрии и поворотов) дает возможность принять число (2) за **определение** площади многоугольника.

**15.** Пусть все стороны многоугольника  $A_1B_1A_2B_2 \dots A_mB_m$ :  $A_k(a_k; b_k)$ ,  $B_k(a_{k+1}; b_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , причем  $B_m(a_1; b_m)$ . Запишите формулу площади для такого многоугольника. Проверьте ее для шестиугольника с вершинами  $(-1; 0)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(2; 5)$ ,  $(3; 5)$ ,  $(3; 7)$ ,  $(-1; 7)$ . (Эта формула пригодилась нам в решении задачи М608 – см. «Квант» № 11 за 1980 г.)

**16.** Выясните, что дает формула (2) для любых  $n$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$  плоскости.

*Ответ* состоит в следующем: пусть замкнутая ломаная  $A_1, A_2, \dots, A_n$  делит плоскость на  $r$  кусков площади  $S_1, \dots, S_r$ ; тогда правая часть формулы (2) равна сумме  $k_1S_1 + \dots + k_rS_r$ , где целое число  $k_j$  показывает, сколько оборотов делает ломаная  $A_1A_2 \dots A_n$  вокруг  $j$ -го куска (причем обороты против часовой стрелки считаются положительными, по часовой стрелке – отрицательными, см. рис.5).

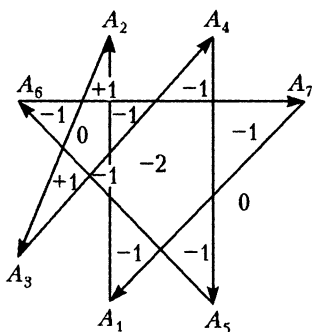


Рис.5. Числа указывают, сколько раз (с учетом направления) ломаная обходит вокруг каждого куска

## РАССМОТРИМ РАЗНОСТЬ

---

Трудно найти сборник олимпиадных или алгебраических задач, где не встречались бы задачи такого типа: *доказать, что при любом натуральном  $n$*

- а)  $7^{2n} - 5^{2n}$  делится на 24;
- б)  $n^3 - n$  делится на 6;
- в)  $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120}$  – целое число;
- г)  $3^{2n+3} + 40n - 27$  делится на 64;
- д)  $2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$  делится на 27;
- е)  $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$  делится на 91;
- ж)  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$  – целое число.

Попробуйте порешать эти задачи. Вероятно, у вас возникнут разные соображения вроде следующих: в задаче

- а) воспользоваться тем, что  $7^2 - 5^2 = 24$ , и тождеством

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \quad (1)$$

показывающим, что  $a^n - b^n$  всегда делится на  $a - b$ ;

- б) выделить три случая:  $n = 3k$ ,  $n = 3k + 1$  и  $n = 3k + 2$ , соответствующие разным остаткам при делении  $n$  на 3;

- в) разложить многочлен в числителе на пять множителей  $(n - 2)(n - 1)(n + 1)(n + 2)$  и заметить, что из пяти последовательных чисел найдется одно, делящееся на 3, одно – на 5, одно – на 4 и еще одно, делящееся на 2 (и не делящееся на 4);

- е) представить разность как  $(25^n - 18^n) - (12^n - 5^n)$  и как  $(25^n - 12^n) - (18^n - 5^n)$ , чтобы доказать ее делимость на 7 и на 13;

- ж) доказать отдельно делимость  $5n^3 + 7n$  на 3 и делимость  $3n^3 + 7n$  на 5.

---

Статья написана в соавторстве с Т.Маликовым.

Не умаляя красоты и полезности этих и других подобных рассуждений, мы хотим разобрать один общий рецепт для всех таких задач. Мы увидим, что справедливость каждого из утверждений а) – ж) достаточно проверить лишь для небольшого числа первых значений  $n$  (в задаче а) – для двух, г) – для трех и т.п.), чтобы быть уверенным в их справедливости при всех  $n$ . А читатель, который разберется в заметке достаточно основательно, сможет сам составлять новые задачи в неограниченном количестве (причем даже такие, где встречаются иррациональные числа):

з) число  $45^n + (-44)^n - 1$  делится на 1980;

и) число  $\left[ (6 + \sqrt{31})^n \right] - 2^n - 1$  делится на 10; вообще, если  $m, a, b$  – натуральные числа и  $b < 2a$ , то число  $\left[ (am + 1 + \sqrt{a^2m^2 + bm + 1})^n \right] - 2^n + 1$  делится на  $2m$  (здесь  $[x]$  – целая часть числа  $x$ )<sup>1</sup>.

### Сумма разностей

Прежде чем формулировать общие теоремы, продемонстрируем ход наших рассуждений на примере д). Эта задача, а также следующие ниже следствие из теоремы 2 и лемма 1 составляют содержание задачи М629 из «Задачника «Кванта». Рассмотрим разность значений данной функции

$$f(n) = 2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$$

в точках  $n + 1$  и  $n$ :

$$g(n) = f(n+1) - f(n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 18n + 12.$$

Мы хотим доказать, что  $f(n)$  делится на 27 при всех  $n = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $f(n)$  можно представить как *сумму разностей*

$$\begin{aligned} f(n) &= (f(n) - f(n-1)) + \\ &+ (f(n-1) - f(n-2)) + \dots + (f(2) - f(1)) + f(1) = \\ &= g(n-1) + g(n-2) + \dots + g(1) + f(1) \end{aligned}$$

и число  $f(1) = 0$  делится на 27, нам достаточно доказать, что  $g(n)$  делится на 27 при всех  $n$ .

---

<sup>1</sup> Эти две задачи прислали наши читатели В. Чичин из с. Вознесенское Хабаровского края и В. Яноус из Инсбрука (Австрия)

Поступим так же с  $g(n)$ : рассмотрим разность

$$h(n) = g(n+1) - g(n) = 9 \cdot 2^{2n-1} - 18$$

и представим  $g(n)$  как сумму  $h(n-1) + h(n-2) + \dots + h(1) + g(1)$ . Поскольку  $g(1) = 0$ , достаточно доказать, что  $h(n)$  делится на 27 при всех  $n$ . Но это уже нетрудно: ведь  $h(1) = 0$ , а при  $n \geq 2$  число  $h(n) = 2 \cdot 9(4^{n-1} - 1)$  делится на  $2 \cdot 9(4 - 1)$  согласно (1). Тем самым задача д) решена.

Нам помог здесь тот факт, что для многочлена  $\varphi(x)$  степени  $s$  разность  $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$  — многочлен на единицу меньшей степени  $s - 1$ , «вторая разность»  $\Delta(\Delta\varphi(x)) = \Delta^2\varphi(x)$  — многочлен степени  $s - 2$  и т.д., так что  $s$ -я разность  $\Delta^s\varphi(x)$  — просто число (многочлен степени 0). Отметим также полезную формулу для суммы разностей, которую мы применили дважды:

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leq j \leq n-1} \Delta\varphi(j) + \varphi(1). \quad (2)$$

### Многочлен плюс геометрическая прогрессия

Сформулируем теперь две общие теоремы, которые можно доказать тем же приемом («рассмотрим разность»).

**Теорема 1.** Если число  $b_0 + b_1n + \dots + b_{k-1}n^{k-1}$  — целое при  $n = 1, n = 2, \dots, n = k$ , то оно целое при всех натуральных  $n$ . (Здесь  $b_i$  — не обязательно целые!)

**Теорема 2.** Если число  $q$  — целое и

$$f(n) = cq^n + b_0 + b_1n + \dots + b_{k-1}n^{k-1}$$

— целое при  $n = 1, n = 2, \dots, n = k + 1$ , то  $f(n)$  — целое при всех натуральных  $n$ .

**Следствие.** Если число  $q$  целое и число  $f(n)$  делится на  $m$  при  $n = 1, n = 2, \dots, n = k + 1$ , то  $f(n)$  делится на  $m$  при всех натуральных  $n$ .

(Конечно, аналогичное следствие можно сформулировать и для многочлена из теоремы 1.)

Чтобы вывести следствие, достаточно применить теорему 2 к выражению  $\bar{f}(n) = f(n)/m$ , у которого все коэффициенты поделены на  $m$ : условие « $f(n)$  делится на  $m$ » эквивалентно тому, что

$$\bar{f}(n) = \frac{c}{m}q^n + \frac{b_0}{m} + \frac{b_1}{m}n + \dots + \frac{b_{k-1}}{m}n^{k-1}$$

— целое число.

Например, для функции  $f(n)$  из примера д) и  $m = 27$  можно применять теорему 2 к выражению

$$\bar{f}(n) = f(n)/27 = \frac{1}{54} 4^n - \frac{1}{3} n^2 + \frac{7}{9} n - \frac{14}{27}.$$

Легко проверить, что  $\bar{f}(1) = \bar{f}(2) = \bar{f}(3) = 0$ ,  $\bar{f}(4) = 2$  и по теореме 2 число  $f(n)$  – целое (т.е.  $f(n)$  делится на 27) при любом натуральном  $n$ .

Теперь перейдем к **доказательству** теоремы 2 (доказательство теоремы 1 мы оставляем читателям в качестве упражнения). Пусть сначала  $k = 1$ .

**Лемма 1.** Если  $q$ ,  $cq + b$  и  $cq^2 + b$  – целые числа, то  $cq^n + b$  – целое при любом натуральном  $n$ .

В самом деле, рассмотрим разность

$$(cq^{n+1} + b) - (cq^n + b) = cq^n(q - 1) = q^{n-1}[(cq^2 + b) - (cq + b)].$$

Это число целое, а потому, согласно (2),  $cq^n + b$  – целое при любом натуральном  $n$ . (Можно рассуждать несколько иначе: рассмотреть разность  $(cq^n + b) - (cq + b)$  и воспользоваться (1).)

Итак, при  $k = 1$  теорема 2 верна. Теперь точно так же, рассмотрев разности, можно доказать ее для  $k = 2$ , затем для  $k = 3$  и т.д. – индукцией по  $k$ . В самом деле, если степень  $k - 1$  многочлена  $b(n) = b_0 + b_1 n + \dots + b_{k-1} n^{k-1}$  больше нуля, то разность

$$g(n) = f(n+1) - f(n) = cq^{n+1} - cq^n + b(n+1) - b(n) = c(q-1) \cdot q^n + \Delta b(n)$$

будет представляться как сумма геометрической прогрессии (с тем же знаменателем  $q$ ) и многочлена, степень которого на единицу *меньше*, причем в условиях теоремы 2 числа  $q$  и  $q(n)$  при  $1 \leq n \leq k$  – целые, так что для  $q(n)$  теорему 2 можно считать доказанной.

*Замечание.* Теорему 2 можно, очевидно, слегка обобщить: достаточно проверить, что в *каких-то*  $k + 1$  последовательных целых точках  $n_0 \leq n \leq n_0 + k$  данное выражение принимает целые значения – тогда оно будет принимать целые значения при всех следующих  $n$ . Например, иногда удобно при проверке начинать с  $n_0 = 0$  или  $n_0 = -1$ .

Это замечание, как и доказанное выше следствие, относятся также к теореме 1 и ко всем обобщениям, о которых пойдет речь ниже.

### Как придумать новую задачу?

Нет ничего проще. Подберем, например,  $a$ ,  $b$  и  $c$  так, чтобы выражение  $f(n) = an + b + c \cdot 9^n$  принимало (какие угодно!) целые значения при  $n = -1$ ,  $n = 0$  и  $n = 1$ . Тогда по теореме 2 (при  $k = 2$ ) число  $f(n)$  будет целым при любом целом  $n \geq -1$ .

Возьмем, скажем,  $f(-1) = -1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 4$ . Решив систему

$$\begin{cases} -a + b + c/9 = -1, \\ b + c = 0, \\ a + b + 9c = 4, \end{cases}$$

мы найдем  $a = \frac{5}{8}$ ,  $b = -\frac{27}{64}$ ,  $c = \frac{27}{64}$ . Именно так, возможно, и был придуман когда-то давно пример г). Советуем читателю в качестве отдыха самому придумать несколько новых примеров.

Но наш путь еще не закончен: теорему хотелось бы обобщить так, чтобы она включала и примеры, где имеется несколько геометрических прогрессий.

### Сумма прогрессий

Попробуйте доказать такой аналог наших теорем 1 и 2:

**Теорема 3.** Если  $q_1, q_2, \dots, q_r$  — целые числа и

$$f(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_{r-1} q_{r-1}^n + c_r q_r^n$$

целое при  $n = 1, 2, \dots, r$ , то  $f(n)$  — целое при любом натуральном  $n$ . (Лемма 1 — частный случай этой теоремы при  $r = 2$ ,  $q_2 = 1$ .)

*Указание.* Для доказательства теоремы 3 полезно рассмотреть разность  $g(n) = f(n+1) - q_r f(n)$ . Поскольку

$$g(n) = c_1 (q_1 - q_r) q_1^n + \dots + c_{r-1} (q_{r-1} - q_r) q_{r-1}^n$$

— сумма  $r - 1$  геометрических прогрессий и в условиях теоремы число  $g(n)$  — целое при  $1 \leq n \leq r - 1$ , доказать теорему можно индукцией по  $r$ : ведь

$$f(n) = g(n-1) + q_r g(n-2) + q_r^2 g(n-3) + \dots + q_r^{n-1} g(1) + q_r^n f(1).$$

(Так, в задаче з) можно рассмотреть разность  $f(n+1) - 45f(n)$ .)

**Упражнение 1.** Проверьте примеры а), е) с помощью теоремы 3 и придумайте к ней несколько новых примеров.

Мы надеемся, что пробудили у читателя страсть к обобщениям, и предлагаем ему следующие, более трудные **упражнения**:

**2.** Сформулируйте и докажите аналоги теорем 1–3

а) для суммы  $r$  прогрессий и многочлена степени  $k - 1$ ;

б) для произведения прогрессии (с целым знаменателем) на многочлен.

Придумайте несколько примеров на применение ваших теорем.

3. Какую более общую теорему такого типа вы можете сформулировать?

4. Можно ли в условиях наших теорем уменьшить число точек, в которых требуется проверка?

5. Докажите утверждение и) и постарайтесь обобщить теорему 3 так, чтобы она годилась и для прогрессий с иррациональными знаменателями.

Указание.  $\left[(6 + \sqrt{31})^n\right] + 1 = (6 + \sqrt{31})^n + (6 - \sqrt{31})^n$ , причем  $y_1 = 6 + \sqrt{31}$  и  $y_2 = 6 - \sqrt{31}$  – корни квадратного уравнения  $y^2 - 12y + 5 = 0$  с целыми коэффициентами.

### Самая общая теорема

Найти естественное обобщение ряда фактов бывает интересно еще потому, что очень часто более общее утверждение доказывается яснее и проще, чем частное. Прекрасная иллюстрация этому – следующая теорема, довольно громоздкая по формулировке, но обобщающая предыдущие и позволяющая ответить на все вопросы упражнений 2–5.

**Теорема 4.** Пусть выражение  $f(n)$  является суммой  $r$  многочленов, умноженных на некоторые геометрические прогрессии. Составим многочлен со старшим коэффициентом 1, корни которого – знаменатели этих  $r$  прогрессий, а кратность каждого корня на единицу больше степени соответствующего ему многочлена. (Степень  $k$  этого характеристического многочлена равна сумме количества  $r$  прогрессий и степеней всех многочленов, на которые они умножены.) Если (1) все коэффициенты характеристического многочлена – целые числа и (2) значения  $f(n)$  – целые при  $n = 1, 2, \dots, k$ , где  $k$  – степень характеристического многочлена, то  $f(n)$  будет целым и при всех натуральных  $n > k$ .

Разумеется, для выполнения условия (1) достаточно (но не обязательно), чтобы все знаменатели прогрессий были целыми числами. Какова роль коэффициентов характеристического многочлена – ясно из следующей очень важной леммы, проверку которой мы оставляем читателю:

**Лемма 2.** Пусть

$$f(x) = B_1(x)q_1^x + B_2(x)q_2^x + \dots + B_r(x)q_r^x, \quad (3)$$

где  $B_i(x)$  – многочлен степени  $k_i - 1$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), и

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= (\lambda - q_1)^{k_1} (\lambda - q_2)^{k_2} \dots (\lambda - q_r)^{k_r} = \\ &= \lambda^k + d_1 \lambda^{k-1} + d_2 \lambda^{k-2} + \dots + d_{k-1} \lambda + d_k. \end{aligned}$$



Тогда при всех  $x$  выполнено равенство:

$$f(x) + d_1 f(x-1) + d_2 f(x-2) + \dots + d_k f(x-k) = 0. \quad (4)$$

Теорема 4 следует отсюда сразу же: если все коэффициенты  $d_1, \dots, d_k$  характеристического многочлена  $D(\lambda)$  целые, то из равенства (3) вытекает, что  $f(n)$  при каждом  $n > k$  получается сложением целых значений  $f(n-1), f(n-2), \dots, f(n-k)$ , умноженных на фиксированные целые коэффициенты.

В качестве иллюстрации рассмотрим два прежних примера.

д) Пусть  $f(n) = \frac{1}{2} \cdot 4^n + (-9n^2 + 21n - 14) \cdot 1^n$ . Здесь  $D(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^3 = \lambda^4 - 7\lambda^3 + 15\lambda^2 - 13\lambda + 4$ . Поэтому для всех  $n$

$$f(n) = 7f(n-1) - 15f(n-2) + 13f(n-3) - 4f(n-4).$$

В частности, вслед за  $f(1) = f(2) = f(3) = 0$  и  $f(4) = 54$  идут  $f(5) = 7 \cdot 54 = 378$ ,  $f(6) = 7 \cdot 378 - 15 \cdot 54 = 1836$ , ...; естественно, все они будут делиться на 27 (даже на 54).

и) Пусть  $f(n) = \frac{(6 + \sqrt{31})^n}{10} + \frac{(6 - \sqrt{31})^n}{10} - \frac{2^n}{10}$ . Здесь коэффициенты многочлена  $D(\lambda) = (\lambda^2 - 12\lambda + 5)(\lambda - 2) = \lambda^3 - 14\lambda^2 + 19\lambda - 10$  — также целые. Вслед за первыми членами  $f(0) = \frac{1}{10}$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 13$  все дальнейшие  $f(n)$  определяются рекуррентным соотношением

$$f(n) = 14f(n-1) - 19f(n-2) + 10f(n-3).$$

В частности,  $f(3) = 14 \cdot 13 - 19 \cdot 1 + \frac{10}{10} = 124$  — целое, следовательно, будут целыми числами также все  $f(n)$  при  $n = 4, 5, \dots$

В качестве последнего упражнения предлагаем читателю разобраться в том, как с помощью леммы 2 можно доказать частные случаи теоремы 4, о которых шла речь выше, и придумать новые упражнения (например, в качестве  $q_1, q_2, q_3$  можно взять числа  $2\cos\frac{\pi}{7}$ ,  $2\cos\frac{2\pi}{7}$ ,  $2\cos\frac{3\pi}{7}$ ; впрочем, убедиться, что это — корни многочлена с целыми коэффициентами, не так просто!).

Заканчивая наш рассказ, заметим, что для выяснения более глубоких вопросов делимости целых чисел наши теоремы не приносят большой пользы (например, чтобы доказать, что  $n^{1693} - n$  при всех  $n$  делится на 1981 или хотя бы на 6, требуется проверка в 1694 точках!).

Однако замечательный результат, который скрыт в лемме 2, относится по существу уже к совершенно другой, не менее интересной и важной теме: *линейным рекуррентным уравнениям*. Можно показать, что все последовательности  $f(n)$ , определяемые формулой (4) и *любыми* начальными членами  $f(1), \dots, f(k)$ , задаются формулой (3) (для того, чтобы этот результат сформулировать в естественной общности, нужно рассматривать не только вещественные, но и комплексные корни многочлена  $D(\lambda)$ ). С выражениями (3) наши читатели, без сомнения, еще встретятся, когда будут знакомиться с дифференциальными уравнениями: общий вид решений любого линейного дифференциального уравнения степени  $k$

$$y^{(k)} + d_1 y^{(k-1)} + \dots + d_{k-2} y'' + d_{k-2} y' + d_k y = 0$$

имеет такую же форму (3).

## МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЁВА И РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

---

Широко распространен взгляд на математика как на человека, беспрерывно занимающегося сложнейшими арифметическими вычислениями (в более утонченном варианте – выписывающего и преобразующего длинные и сложные формулы). Читателям «Кванта» хорошо известно, что бывает красивая и важная математика «без формул», однако доля истины в таком взгляде все же есть. Умение взглянуть на формулы с неожиданной точки зрения, преобразовывать их, открывать новые, находить связи между ними – важная часть работы математика. В этой статье мы рассмотрим каскад любопытных формул, связанных со знаменитой последовательностью «многочленов Чебышёва» (некоторые из этих формул предлагалось доказать в задаче М488 – «Квант», №2 за 1978 год), а также общие математические идеи, которые стоят за ними.

### Введение. Две замечательные последовательности многочленов

Многочлены, о которых будет идти речь, встречаются во многих задачах анализа, вычислительной математики, алгебры. Они появились в 1845 году, в работе русского математика Пафнутия Львовича Чебышёва в связи с таким вопросом.

Рассмотрим всевозможные многочлены данной степени  $n$  со старшим коэффициентом 1; какой из них *наименее уклоняется от нуля* на отрезке  $[-1; 1]$ , т.е. для какого многочлена  $F_n(x) = x^n + \dots$  величина

$$c_n = \max_{[-1; 1]} |F_n(x)|$$

наименьшая?

Оказывается, это  $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$  – многочлен из левой колонки таблицы 1, деленный на старший коэффициент. Например, среди квадратных трехчленов – это  $x^2 - \frac{1}{2}$  (его *отклоне-*

---

Статья написана в соавторстве с А.Зелевинским.

ние от нуля  $c_2$  равно  $\frac{1}{2}$ , а у любого другого квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  оно больше); среди кубических многочленов – это  $x^3 - \frac{3}{4}x$  (для него  $c_3 = \frac{1}{4}$ ); и вообще отклонение от нуля  $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$  многочлена  $\tilde{T}_n(x)$  меньше, чем у любого другого многочлена  $F_n(x) = x^n + \dots$  степени  $n$ .<sup>1</sup>

Таблица 1

**Многочлены Чебышёва первого и второго рода**

$n$	$T_n$	$U_n$
0	1	1
1	$x$	$2x$
2	$2x^2 - 1$	$4x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$	$8x^3 - 4x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	.....

Если умножить каждый из многочленов в таблице на  $2x$  и вычесть предыдущий (стоящий над ним), получится следующий.

Если же отклонение от нуля измерять иначе – заменить выражение  $c_n$  выражением

$$l_n = \int_{-1}^1 |F_n(x)| dx,$$

то наименее уклоняющимся от нуля многочленом  $n$ -й степени со старшим коэффициентом 1 окажется многочлен  $\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x)$ , где  $U_n(x)$  берется из правой колонки таблицы 1: для многочлена  $U_n(x)$  величина  $l_n$  (выделенная площадь на рисунке 1) равна 2; стало быть, для  $\tilde{U}_n$  она равна  $1/2^{n-1}$ ; для

<sup>1</sup> Здесь мы доказывать этого не будем. Элементарное доказательство можно найти в [1] – первой книге из списка литературы в конце статьи.

любого другого многочлена  $F_n(x) = x^n + \dots$  она больше (теорема А.Н.Коркина и Е.И.Золотарева).

Эти факты связаны с такими характеристическими свойствами **многочленов Чебышёва**:

1°. Значения многочлена  $T_n$  во всех точках экстремума и в концах отрезка  $[-1; 1]$  одинаковы по модулю. Площадь каждого из  $n + 1$  кусочков, ограниченных графиком многочлена  $U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = \pm 1$ , одна и та же (рис.1).

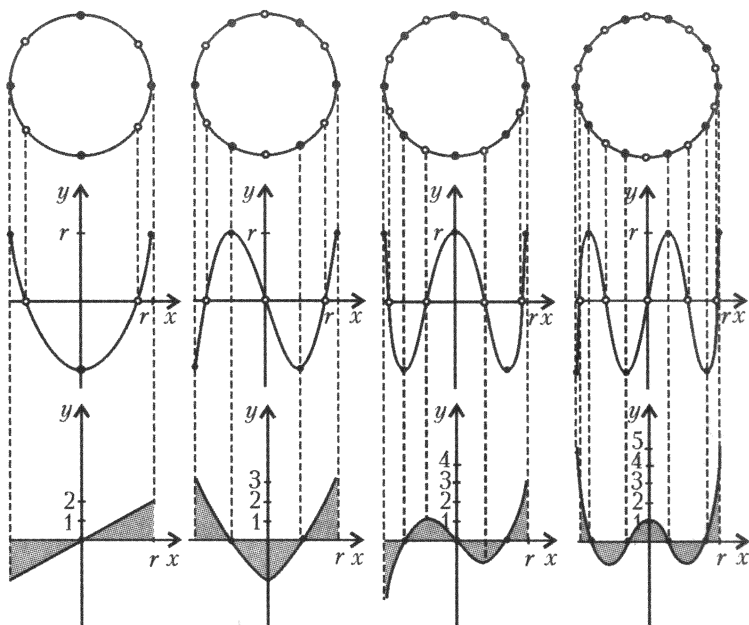


Рис.1. Если прозрачный лист бумаги  $0 \leq x \leq 2\pi r$ ,  $-r \leq y \leq r$  с нарисованным на нем графиком  $y = r \cos nx$  скрутить в цилиндр (диаметра и высоты  $2r$ ) и посмотреть на него сбоку так, чтобы графики на передней и задней половинках совместились, мы увидим график  $n$ -го многочлена Чебышёва первого рода. Эти графики при  $n = 2, 3, 4, 5$  изображены в верхнем ряду (при выборе масштаба  $r = 1$  получаются графики  $y = T_n(x)$ , при  $r = 2$  — графики  $y = Q_n(x)$  — см. упражнение 3). В нижнем ряду под  $n$ -м многочленом изображена его производная, деленная на  $n$ ; это  $(n - 1)$ -й многочлен Чебышёва второго рода; у него все  $n$  закрашенных фигурок имеют одинаковую площадь

(Подобными свойствами обладают лишь многочлены, полученные из равенств  $y = U_n(x)$  и  $y = T_n(x)$  линейной заменой переменных  $x$  и  $y$ .)

Свойство 1° вытекает из основных соотношений

$$2^\circ. T_n(\cos \varphi) = \cos n\varphi, \quad \sin \varphi \cdot U_{n-1}(\cos \varphi) = \sin n\varphi.$$

В дополнение к тригонометрическим формулам 2°, которые определяют значения многочленов  $T_n$  и  $U_n$  при  $|x| \leq 1$ , для  $|x| > 1$  имеются совершенно иные на вид тождества:

$$3^\circ. T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2},$$

$$U_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Корни многочленов  $T_n$  и  $U_n$  видны из следующей пары тождеств:

$$4^\circ. T_n(x) = 2^{n-1} \left( x - \cos \frac{\pi}{2n} \right) \left( x - \cos \frac{3\pi}{2n} \right) \dots \left( x - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right),$$

$$U_n(x) = 2^n \left( x - \cos \frac{\pi}{n+1} \right) \left( x - \cos \frac{2\pi}{n+1} \right) \dots \left( x - \cos \frac{n\pi}{n+1} \right).$$

Таким образом, корни и точки экстремума многочлена  $T_n(x)$  — проекции вершин правильного  $4n$ -угольника с диаметром  $[-1; 1]$  на этот диаметр (см. рис.1).

Ниже мы докажем, наряду с другими, соотношения 2°–4° и проиллюстрируем на их примере некоторые важные методы алгебраических преобразований.

За определение многочленов Чебышёва можно было бы принять любую из написанных выше формул, но нам удобнее положить в основу простое рекуррентное соотношение между ними, которое описано в подписи к таблице 1, и вывести из него все формулы.

Ниже мы предпочитаем иметь дело с многочленами, получающимися из  $T_n$  и  $U_n$  изменением масштаба (см. рис. 1):  $P_n(x) = U_n(x/2)$ ,  $Q_n(x) = 2T_n(x/2)$ ; ту роль, которую для  $T_n$  и  $U_n$  играет отрезок  $[-1; 1]$ , будет играть теперь отрезок  $[-2; 2]$ . Новые многочлены хороши тем, что имеют целые коэффициенты, а их старшие коэффициенты равны 1. (Разумеется, формулы перехода, переписанные в «обратном» виде:  $P_n(2x) = U_n(x)$ ,  $Q_n(2x) = 2T_n(x)$ , — позволяют в любой момент

вернуться к многочленам  $U_n$  и  $T_n$ .) Как правило, мы будем, доказывая что-то для  $P_n$ , предлагать аналогичные свойства  $Q_n$  читателю в качестве упражнений. Призываем его вооружиться карандашом и бумагой и проделывать подробно все выкладки, причем сначала – для конкретных небольших значений  $n = 2, 3, 4, \dots$  (пока все не станет ясным).

### Рекуррентные соотношения и индукция

Положим  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  и

$$P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x). \quad (1)$$

Выпишем несколько первых членов этой последовательности. Вслед за  $P_0(x) = 1$  и  $P_1(x) = x$  идут

$$P_2(x) = x^2 - 1,$$

$$P_3(x) = x(x^2 - 1) - x = x^3 - 2x,$$

$$P_4(x) = x(x^3 - 2x) - (x^2 - 1) = x^4 - 3x^2 + 1,$$

$$P_5(x) = x(x^4 - 3x^2 + 1) - (x^3 - 2x) = x^5 - 4x^3 + 3x$$

и т.д. (для многочленов до  $P_{12}$  вы можете проверить результаты по таблице 2).

Таблица 2

Треугольник Паскаля

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	36	84	126	126	126	84
10	1	10	45	120	210	252	210
11	1	11	55	165	330	462	462
12	1	12	66	220	495	792	924
	...	...	...	...	...	...	...

(О свойствах биномиальных коэффициентов, составляющих этот треугольник, подробно рассказано в брошюре [7]. Числа, стоящие на  $n$ -й диагонали, взятые с чередующимися знаками, – коэффициенты многочленов  $P_n(x)$ ; про их сумму – со знаками и без – см. упражнения 6,а) и 8,а).)

Многочлены  $P_n(x)$  возникают в разных ситуациях. Рассмотрим, например, дроби

$$R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x - \frac{1}{x}, \quad R_3(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}},$$

$$R_4(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}, \quad R_5(x) = x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}}, \dots$$

Подобные «многоэтажные» (так называемые *цепные*) дроби – полезный инструмент для различных задач о приближениях чисел и функций; ими, кстати говоря, тоже занимался П.Л.Чебышев.

После преобразований получается

$$R_2(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, \quad R_3(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1},$$

$$R_4(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 - 2x}, \quad R_5(x) = \frac{x^5 - 4x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 1}, \dots$$

(проверьте!). Мы видим, что числители и знаменатели в стандартной записи этих дробей – как раз многочлены  $P_n(x)$ .

Другой пример: рассмотрим функцию  $\sin n\varphi$  и постараемся выразить ее через  $\sin \varphi$  и многочлен от  $\cos \varphi$ :

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi &= 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ \sin 3\varphi &= \sin \varphi \cdot (4 \cos^2 \varphi - 1), \\ \sin 4\varphi &= \sin \varphi (8 \cos^3 \varphi - 4 \cos \varphi) \end{aligned}$$

(проверьте!). Оказывается,  $\sin n\varphi = \sin \varphi \cdot P_{n-1}(2 \cos \varphi)$  для всех  $n \geq 1$ ; другими словами, при  $\sin \varphi \neq 0$

$$P_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Полученные соотношения нетрудно получить с помощью метода математической индукции и формулы (1). Действительно,  $R_{n+1}(x) =$



$= x - \frac{1}{R_n(x)}$ . Поэтому, если предположить, что для некоторого  $n$

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)},$$

то из соотношения (1) легко получить аналогичное равенство для  $n$ , увеличенного на 1:

$$R_{n+1}(x) = x - \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{xP_n(x) - P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)},$$

что и требуется.

Аналогично для синусов: если предположить, что при  $k = n - 1$  и  $k = n$

$$\sin(k+1)\varphi = \sin\varphi \cdot P_k(2\cos\varphi),$$

то из (1) следует

$$\begin{aligned} \sin\varphi \cdot P_{n+1}(2\cos\varphi) &= 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot P_n(2\cos\varphi) - \sin\varphi \cdot P_{n-1}(2\cos\varphi) = \\ &= 2\cos\varphi \cdot \sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi = \sin(n+2)\varphi; \end{aligned}$$

мы воспользовались тождеством  $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta-\alpha)$ .

(Заметим, что мы провели индуктивный переход не от  $n$  к  $n+1$ , как обычно, а от  $n-1$  и  $n$  к  $n+1$ ; при этом необходимо отдельно проверить первые два равенства при  $n=0$  и  $n=1$ .)

### Упражнения

1. Докажите с помощью индукции и рекуррентного соотношения (1), что при  $|x| > 2$  справедливо тождество

$$P_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 4})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2 - 4}}. \quad (3)$$

(Мы еще к нему вернемся.)

2. Докажите, что а)  $P_n(2) = n+1$ , б)  $P_n(-2) = (-1)^n \cdot (n+1)$ . (Сделайте это тремя способами: с помощью (1), а также переходя к пределу в равенстве (2) при  $\varphi \rightarrow 0$  и  $\varphi \rightarrow \pi$  и в равенстве (3) — при  $x \rightarrow \pm 2$ .)

3. Рассмотрим последовательность многочленов  $Q_0(x)$ ,  $Q_1(x)$ ,  $Q_2(x)$ , ..., удовлетворяющую соотношению (1) и начальным условиям  $Q_0(x) = 2$ ,  $Q_1(x) = x$ . Выпишите первые 6 многочленов  $Q_n(x)$ . Докажите тождества

$$\begin{aligned} \text{а) } Q_n(x)/Q_{n-1}(x) &= x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}}} \quad (n-1 \text{ минус}); \end{aligned}$$

$$\text{б) } 2 \cos n\varphi = Q_n(2 \cos \varphi);$$

$$\text{в) при } |x| > 2$$

$$Q_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4})^n + (x - \sqrt{x^2 - 4})^n}{2^n}.$$

4. Докажите, что любая последовательность многочленов  $R_0(x)$ ,  $R_1(x)$ , ..., удовлетворяющая соотношению (1), выражается через последовательность  $(P_n(x))$  по формуле

$$R_n(x) = R_1(x) \cdot P_{n-1}(x) - R_0(x) \cdot P_{n-2}(x).$$

В частности,  $Q_n(x) = xP_{n-1}(x) - 2P_{n-2}(x) = P_n(x) - P_{n-2}(x)$ . Выведите отсюда все тождества из упражнения 3.

### Корни многочленов и произведения

Многие интересные формулы, в которых участвуют симметричные выражения от  $n$  чисел (или букв), оказываются легко объяснимыми, если эти числа рассматривать как корни некоторого многочлена степени  $n$ . Для  $n$  чисел  $\gamma_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$  (где  $k = 1, 2, \dots, n$ ) таким многочленом служит наш  $P_n(x)$ . В самом деле, подставляя в (2) вместо  $\varphi$  значения  $\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \dots, \frac{n\pi}{n+1}$ , мы видим, что числа  $\gamma_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$  — корни многочлена  $P_n(x)$ . Тут нам понадобится следствие из **теоремы Безу**<sup>2</sup>: *если  $\gamma$  — корень многочлена  $F(x)$ , то  $F(x)$  делится на  $x - \gamma$* . (В самом деле, заменив переменную  $x$  на  $y = x - \gamma$ , мы получим многочлен  $\tilde{F}(y) = F(x - \gamma)$ , у которого есть корень  $y = 0$ , а такой многочлен, очевидно, делится на  $y$ .) Наш многочлен  $P_n(x)$  должен делиться на каждый из двучленов  $x - \gamma_k$ , а значит — и на их произведение; поскольку он имеет степень  $n$  и старший коэффициент 1, он просто равен произведению  $\prod_{1 \leq k \leq n} (x - \gamma_k)$ . Итак,

$$P_n(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \left( x - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \right). \quad (4)$$

**Упражнение 5.** а) Докажите тождество

$$Q_n(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \left( x - 2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right). \quad (4')$$

<sup>2</sup> Подробнее о теореме Безу и разложении на множители многочленов см. [2].

6) Проверьте его и тождество (4) для  $n = 2, 3, 4$  и  $5$ .

Приведем одно любопытное тождество, которое вытекает из сопоставления формул (4) и (2).

Вычислим двумя способами  $P_{2m}(0)$  при  $m > 0$  и приравняем полученные выражения.

С одной стороны, из (2) получаем

$$\begin{aligned} P_{2m}(0) &= P_{2m}\left(2 \cos \frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin \frac{(2m+1)\pi}{2}\right) / \sin \frac{\pi}{2} = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m. \end{aligned}$$

С другой стороны, согласно (4),

$$P_{2m}(0) = \prod_{1 \leq k \leq 2m} \left(-2 \cos \frac{k\pi}{2m+1}\right).$$

Заменив каждое  $\cos \frac{k\pi}{2m+1}$  при  $m+1 \leq k \leq 2m$  на  $\left(-\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$ , получим

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \cdot \left[2^m \cdot \prod_{1 \leq k \leq m} \cos \frac{k\pi}{2m+1}\right]^2.$$

Но выражение в квадратных скобках положительно, поскольку в произведение входят косинусы только острых углов; поэтому оно равно 1, т.е.

$$\prod_{1 \leq k \leq m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}. \quad (5)$$

Приведем красивую «словесную» формулировку (5): *при  $m > 0$  среднее геометрическое косинусов острых углов, кратных  $\frac{\pi}{2m+1}$ , равно  $\frac{1}{2}$ .*

### Упражнения

6. а) Найдите  $P_n(1)$ ,  $P_n(-1)$ ,  $Q_n(1)$ ,  $Q_n(-1)$ .

Докажите похожие на (5) равенства:

б)  $\prod_{1 \leq k \leq m} \sin \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}} \quad (m \geq 1);$

в)  $\prod_{1 \leq k \leq m} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2m+1} = \sqrt{2m+1} \quad (m \geq 1);$

г)  $\prod_{1 \leq k \leq m} \cos \frac{(2k-1)\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m} \quad (m \geq 1).$

7. Выясните, при каких  $m$  и  $n$

а) многочлен  $P_n$  делится на  $P_m$ ;

б) многочлен  $Q_n$  делится на  $Q_m$ .

### Производящие функции, степенные ряды и коэффициенты

В этом разделе мы познакомим вас с очень плодотворным методом, широко применяемым в самых различных разделах математики – анализе, комбинаторике, теории вероятностей, – с *методом производящих функций*. Этот метод позволяет иногда собрать отдельные члены последовательности, как «кирпичи», в одно целостное «здание» и получить информацию сразу обо всей последовательности.

Пусть нам дана последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Назовем ее *производящей функцией* выражение

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Такие выражения математики называют *формальными степенными рядами*. Эти ряды можно складывать, вычитать и перемножать как обычные многочлены, можно делить один ряд на другой (если свободный член ряда-делителя отличен от 0), любой ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать – и все эти операции можно использовать, чтобы получить новые последовательности из уже изученных. Часто оказывается возможным из рекуррентного соотношения, которым определена последовательность, найти простую формулу для ее производящей функции, и наоборот – из производящей функции извлечь формулу или соотношения для членов последовательности.

Для конечной последовательности  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  производящей функцией будет многочлен  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ . Например, многочлен  $f_n(z) = (1+z)^n$  служит производящей функцией для *биномиальных коэффициентов*  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$  – членов  $n$ -й строки треугольника Паскаля (см. таблицу 2):

$$\sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k z^k = (1+z)^n. \quad (6)$$

Продифференцировав это тождество  $k$  раз и положив затем  $z = 0$ , найдем  $C_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)/1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ .

Раскрывая скобки и выделяя коэффициенты при  $z^m$  в очевидном тождестве  $(1+z)(1+z)^n = (1+z)^{n+1}$ , записанном в

виде

$$(1+z) \left( \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k z^k \right) = \sum_{0 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k z^k,$$

получим важное соотношение  $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ .

Среди бесконечных последовательностей особенно простую, легко «сворачивающуюся» производящую функцию имеет геометрическая прогрессия  $b_0 = b$ ,  $b_n = qb_{n-1}$ . Заменяв в сумме

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = b + \sum_{n \geq 1} b_n z^n$$

каждое  $b_n$  на  $qb_{n-1}$ , получим

$$f(z) = b + qz \sum_{n \geq 1} b_{n-1} z^{n-1} = b + qzf(z),$$

откуда  $f(z)(1-qz) = b$ , т.е.

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \frac{b}{1-qz}. \quad (7)$$

Это, конечно, известная формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии (при  $|qz| < 1$ ). Но тем же приемом можно получить и производящую функцию для нашей последовательности многочленов  $P_n(x)$ .

Положим

$$\Phi(z) = \sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n = 1 + xz + \sum_{n \geq 2} P_n(x) z^n.$$

(Здесь  $x$  играет роль параметра и ниже мы для краткости вместо  $P_n(x)$ ,  $P_{n-1}(x)$ , ... будем писать  $P_n$ ,  $P_{n-1}$ , ...) Согласно (1), заменим каждое  $P_n$  при  $n \geq 2$  на  $xP_{n-1} - P_{n-2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 1 + xz + \sum_{n \geq 2} xP_{n-1}z^n - \sum_{n \geq 2} P_{n-2}z^n = \\ &= 1 + xz + xz \cdot \sum_{n \geq 2} P_{n-1}z^{n-1} - z^2 \sum_{n \geq 2} P_{n-2}z^{n-2} = \\ &= 1 + xz + xz(\Phi(z) - 1) - z^2\Phi(z). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Phi(z) \cdot (z^2 - xz + 1) = 1$  и

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2 - xz + 1}. \quad (8)$$

В этой простой формуле скрыта вся хитрая последовательность многочленов  $P_n$ , которой мы до сих пор занимались! Отдельные  $P_n$ , спрятанные в ней, мы «вытащим» двумя разными способами.

1) При  $|x| > 2$  квадратное уравнение  $z^2 - xz + 1 = 0$  имеет два корня:

$$u = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \quad v = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}. \quad (9)$$

Из  $z^2 - xz + 1 = (z - u)(z - v)$ , учитывая  $uv = 1$ , получим

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{(u - z)(v - z)} = \left( \frac{1}{v - z} - \frac{1}{u - z} \right) \frac{1}{u - v} = \\ &= \left( \frac{u}{1 - zu} - \frac{v}{1 - zv} \right) \frac{1}{u - v} = \sum_{n \geq 0} \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{u - v} z^n, \end{aligned}$$

т.е.  $P_n(x) = (u^{n+1} - v^{n+1}) / (u - v)$ ; это формула (3).

2) Найдем из (8) отдельные коэффициенты каждого члена  $P_n(x)$ . Делается это так:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{1 - (xz - z^2)} = \sum_{k \geq 0} (xz - z^2)^k = \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j C_k^j x^{k-j} z^{k+j} \right) = \sum_{n \geq 0} z^n \left( \sum_j (-1)^j C_{n-j}^j \cdot x^{n-2j} \right) \end{aligned}$$

(мы воспользовались формулами суммы бесконечной геометрической прогрессии (7), бинома Ньютона (6) и выделили коэффициент при  $z^n$ , который и есть нужный нам  $P_n(x)$ ). Следовательно,

$$P_n(x) = \sum_j (-1)^j C_{n-j}^j x^{n-2j} \quad (10)$$

(например:  $P_6(x) = C_6^0 x^6 - C_5^1 x^4 + C_4^2 x^2 - C_3^3 = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$ ).

Конечно, доказать готовые формулы (3) и (10) можно без производящих функций; самое замечательное – как они возникли: почти сами собой, из короткой формулы (8).

Обоснование всех действий с бесконечными рядами, которые мы производили – а оно, разумеется, необходимо, – можно было бы провести, либо заметив, что при небольших по модулю числовых значениях  $z$  все рассматриваемые ряды *сходятся* (как (7) при  $|z| < 1/|q|$ ), т.е. представляют настоящие функции от  $z$ , либо проверив, что для определенных формально операций сложения, умножения и т.д. (каждый коэффициент ряда выражается через конечное число

других, а  $z$  — просто буква!) выполнены все обычные законы. Подробнее с методом производящих функций и степенными рядами можно познакомиться по книгам [3], [4], [6].

8. Рассмотрим последовательность чисел *Фибоначчи*

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

а) Докажите, что ее производящая функция равна  $\frac{z}{1-z-z^2}$ . Выведите отсюда

б) *формулу Бинэ*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

(другой вывод этой формулы см. в [5]).

в) Докажите тождество  $u_n = \sum_j C_{n-j-1}^j$ .

9. а) Найдите производящую функцию для последовательности многочленов  $Q_n(x)$  из упражнения 3 и докажите с ее помощью, что (при  $|x| > 2$ )

$$Q_n(x) = u^n - v^n,$$

где  $u$  и  $v$  определены формулами (9) (в этом заключалось упражнение 3, в)).

б) (Для тех, кто знаком с комплексными числами; см. [1]). Проверьте, что формулы (3) и (3') при  $|x| < 2$  превращаются в формулы (2) и (2'). (Указание:  $u = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $v = \cos \varphi - i \sin \varphi$ , если  $x = 2 \cos \varphi$ .)

## Литература

1. А.М.Яглом и И.М.Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. «Библиотека математического кружка», выпуск 5. — М.: Гостехтеориздат, 1954; задачи 130–134.

2. Избранные вопросы математики. (Факультативный курс 10), раздел «Комплексные числа и многочлены». — М.: Просвещение, 1980.

3. Д.Пойа, Г.Сеге. Задачи и теоремы из анализа. — М.: Наука, 1978.

4. Анри Картан. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. — М.: ИЛ, 1963.

5. Н.Н.Воробьев. Числа Фибоначчи. «Популярные лекции по математике», выпуск 6. — М.: Наука, 1978.

6. Н.Я.Виленкин. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.

7. В.А.Успенский. Треугольник Паскаля. «Популярные лекции по математике», выпуск 43. — М.: Наука, 1979.

В основе математики лежит арифметика – теория натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots$ . В теории чисел много глубоких и красивых теорем. Немало в ней трудных и до сих пор не решенных проблем, в течение сотен лет не поддающихся усилиям самых выдающихся математиков. Целые разделы современной математики возникли из попыток решения и обобщения теоретико-числовых задач. К.Ф.Гаусс (1777–1855), сделавший много замечательных открытий в теории чисел и в других областях математики, сказал: «Математика – царица наук; теория чисел – царица математики».

Цель этой статьи – познакомить читателей с простейшими понятиями этой увлекательной науки, основной теоремой арифметики, некоторыми арифметическими функциями и принципами подсчета.

### § 1. Простые и составные числа

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело с натуральными числами. Мы говорим, что число  $n$  *делится* на число  $a$ , если существует такое число  $b$ , что  $n = ab$ . В этом случае число  $a$  называется *делителем* числа  $n$ , а число  $n$  называется, в свою очередь, *кратным* числу  $a$ .

Всякое натуральное число, большее единицы, имеет, по крайней мере, два делителя: 1 и само это число. Число, большее 1, называется *простым*, если у него нет других делителей, и *составным*, если они есть. Единица при этом не является ни простым, ни составным числом.

*Каждое натуральное число можно разложить в произведение простых.*

В самом деле, составное число  $n$  можно разложить в произведение двух множителей, меньших  $n$ . Если среди них есть не простые (составные), можно каждое из них разложить в произведение двух меньших и т.д. Очевидно, этот процесс не может продолжаться бесконечно, потому что на каждом шагу мы получаем меньшие множители, чем на предыдущем, а всего натуральных чисел, меньших  $n$ , конечное число:  $n - 1$ . В результате мы приходим к разложению числа на простые множители.

---

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером.



Обычно одинаковые простые множители собирают вместе и записывают разложение в таком стандартном виде:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  – различные простые числа,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  – натуральные числа. Например,  $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ .

**Основная теорема арифметики.** *Всякое натуральное число, большее 1, разлагается на простые множители единственным образом.*

Основной эта теорема называется потому, что практически все свойства делимости чисел являются ее следствиями.

Мы не будем останавливаться на доказательстве основной теоремы (его можно найти, например, в [1], [3]), а сформулируем лишь одно ее следствие.

*Для того чтобы число  $a$  делилось на число  $b$ , необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение числа  $b$ , входил в разложение  $a$  в такой же или в более высокой степени.*

А как разложить большое число на простые множители? В этом нам поможет такое полезное наблюдение.

*Если число  $n$  составное, то у него есть делитель, не превосходящий  $\sqrt{n}$  и больший 1.*

Допустим противное. Пусть  $n = ab$ , и оба делителя  $a$  и  $b$  больше, чем  $\sqrt{n}$ . Поскольку  $a > \sqrt{n}$  и  $b > \sqrt{n}$ , получаем, что  $ab > n$ , что противоречит предположению.

Чтобы убедиться в простоте данного числа  $n$  или, если  $n$  составное, найти его делитель, достаточно проверить, делится ли  $n$  на простые числа, не большие  $\sqrt{n}$ .

Составить список простых чисел, не превосходящих заданного числа  $N$ , можно таким образом. Надо выписать подряд все натуральные числа от 1 до  $N$ , вычеркнуть единицу, потом вычеркнуть все четные числа, кроме числа 2, затем вычеркнуть все числа, кратные 3, кроме самого числа 3, затем – кратные 5, и т. д. вплоть до самого большого простого числа, не превосходящего  $\sqrt{N}$ . После вычеркивания чисел, кратных какому-то простому числу  $p$ , первое не вычеркнутое число и будет следующим за  $p$  простым числом. Этот метод просеивания чисел называется «решетом Эратосфена». Он не так плох, как кажется на первый взгляд: например, чтобы составить таблицу простых чисел до 2000, достаточно вычеркнуть все кратные первым четырнадцати простым числам от 2 до 43 (так как  $47^2 > 2000 > 43^2$ ). С помощью современных ЭВМ составлены очень большие таблицы простых чисел. Здесь, конечно, стоит

заметить, что все простые числа выписать нельзя: как умел доказывать еще Евклид,

*существует бесконечно много простых чисел.*

Предположим, что простых чисел – конечное число и  $p$  – самое большое из них. Рассмотрим произведение  $p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot p$  всех чисел от 1 до  $p$  ( $p!$  читается « $p$  факториал»). Число  $p!$  делится на все простые числа, так как, по предположению, в произведении  $p!$  содержатся все простые числа. Следующее за ним в натуральном ряду число  $p! + 1$  должно раскладываться на простые множители, но это невозможно, так как  $p! + 1$  не делится ни на одно из простых чисел! Противоречие.

Многие древние и до сих пор до конца не решенные проблемы теории чисел относятся к распределению простых чисел в натуральном ряду.

Например, наблюдения показывают, что встречаются рядом стоящие простые нечетные числа: 3 и 5, 5 и 7, 17 и 19, 29 и 31 и т.п. Такие числа называются *простыми близнецами*. До сих пор не известно, конечно или бесконечно количество пар простых близнецов.

С другой стороны, между простыми числами могут встречаться сколь угодно большие промежутки, точнее,

*для любого  $k$  в натуральном ряду существует  $k$  последовательных составных чисел.*

В самом деле, возьмем число  $(k + 1)!$  и рассмотрим ряд из  $k$  последовательных чисел:

$$(k + 1)! + 2; (k + 1)! + 3; (k + 1)! + 4; \dots; (k + 1)! + k + 1.$$

Все они составные: первое делится на 2, второе – на 3, ..., последнее – на  $k + 1$ .

### Задачи

1. Разложите на простые множители числа

а) 1981; б) 1982; в) 1983; г) 1984.

**Решение** задачи 1, в). Разделив 1983 на 3, получим  $1983 = 3 \cdot 661$ . Теперь ищем делители числа 661. Так как  $25^2 < 661 < 26^2$ , нужно проверить делимость на простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Ни на одно из них 661 не делится, значит, 661 – простое число.

2. Укажите в натуральном ряду а) шесть; б) тринадцать последовательных составных чисел.

в) Существуют ли такие соседние простые числа, между которыми в натуральном ряду помещается ровно шесть составных чисел?

3. Докажите, что если  $d$  – наибольший делитель составного числа  $n$ , меньший  $n$ , то число  $n/d$  – простое.

4. Докажите, что среди натуральных чисел от 1 до  $30t$  не более  $10t$  простых чисел (при каждом  $t = 1, 2, 3, \dots$ ).

5. Найдите все такие числа  $p$ , что числа  $p, p + 2, p + 4$  одновременно являются простыми (такие числа можно назвать простыми «тройнями»).

6. Каким количеством нулей кончается десятичная запись числа  $30!$ ?

7. Докажите, что среди чисел  $2, 5, 8, 11, \dots$  (т.е. чисел вида  $3t + 2$ , где  $t = 0, 1, 2, \dots$ ) бесконечно много простых.

## § 2. Количество делителей. Комбинаторное правило произведения

На рисунке 1 выписаны все натуральные делители чисел 96 и 144. Мы видим, что все делители числа 96 разбиваются на пары *дополнительных* друг другу делителей (на рисунке 1 они соединены дугами), а у числа 144 один из делителей, 12,

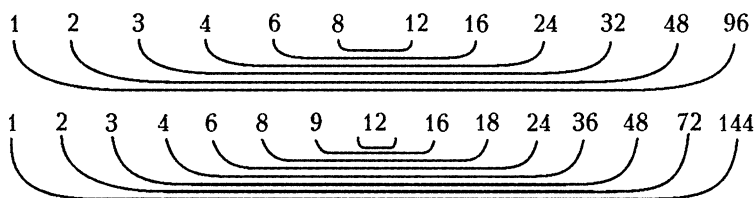


Рис.1. Делители и дополнительные к ним

является дополнительным к самому себе, поскольку  $144 = 12^2$ . Из симметрии множества делителей следует такое утверждение:

*Если число  $n$  не является квадратом целого числа, то у него четное число делителей, а если является – то нечетное.*

В самом деле, каждому делителю  $a$  числа  $n$ , меньшему  $\sqrt{n}$ , соответствует делитель  $n/a$ , больший  $\sqrt{n}$ . Поэтому делителей, отличных от  $\sqrt{n}$ , всегда четное число. Если же  $n = k^2$ , то к ним добавляется еще один делитель  $k$ .

Пусть  $d(n)$  – количество делителей натурального числа  $n$ . Как показано выше, если  $n$  – полный квадрат, то  $d(n)$  – нечетное число (например,  $d(144) = 15$ ), а если нет, то  $d(n)$  – четное число (например,  $d(96) = 12$ ). Покажем теперь, как, зная разложение числа  $n$  на простые множители, находить значение  $d(n)$ .

Прежде всего заметим, что при простом  $p$  всегда  $d(p^\alpha) = \alpha + 1$ .

Действительно, по определению, простое число  $p$  имеет только два делителя: 1 и  $p$ , а в силу следствия из основной

теоремы арифметики, число  $p^\alpha$  имеет  $(\alpha + 1)$  делителей:  $1, p, p^2, \dots, p^\alpha$  (считается, что  $p^0 = 1$ ).

Рассмотрим теперь число  $n$  с двумя различными простыми множителями, например  $n = 144 = 2^4 \cdot 3^2$ . Все его делители имеют вид  $2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$ , где  $\beta_1$  может принимать любое из пяти целых значений от 0 до 4,  $\beta_2$  — одно из трех значений 0, 1 или 2. Значит, всего разных пар  $(\beta_1; \beta_2)$  может быть  $3 \cdot 5 = 15$ , так что  $d(144) = 15$  (рис.2). Здесь мы воспользовались полезным принципом подсчета.

	$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$
$3^0$	1	2	$2^2$	$2^3$	$2^4$
$3^1$	3	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3$	$2^3 \cdot 3$	$2^4 \cdot 3$
$3^2$	$3^2$	$2 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^3 \cdot 3^2$	$2^4 \cdot 3^2$

Рис.2. Правило произведения: делители  $2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$  числа  $144 = 2^4 \cdot 3^2$  ( $0 \leq \beta_1 \leq 4, 0 \leq \beta_2 \leq 2$ ) размещаются в табличке  $5 \times 3$

**Правило произведения.** Если элемент  $\beta_1$  можно выбрать  $N_1$  способами, а элемент  $\beta_2$  — независимо от  $\beta_1$  —  $N_2$  способами, то всего можно составить  $N_1 \cdot N_2$  различных пар  $(\beta_1; \beta_2)$ . Вообще, если нужно составить набор  $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_k)$  из  $k$  элементов, причем элемент  $\beta_1$  можно выбрать  $N_1$  способами, элемент  $\beta_2$  —  $N_2$  способами, ..., элемент  $\beta_k$  —  $N_k$  способами, то всего можно составить  $N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k$  различных наборов  $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_k)$ .

Это общее правило позволяет написать формулу для числа делителей любого  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ . В самом деле, согласно следствию из основной теоремы арифметики, любой делитель числа  $n$  имеет вид  $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$ , где  $\beta_i$  принимает одно из  $(\alpha_i + 1)$  значений 0, 1, ...,  $\alpha_i$ . Следовательно, количество разных наборов  $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_k)$ , а значит, и различных делителей числа  $n$ , равно

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1). \quad (*)$$

### Задачи

8. Найдите: а)  $d(1000)$ ; б)  $d(1350)$ ; в)  $d(5040)$ ; г)  $d(84^{19})$ .

**Решение** задачи 8,б). 24. Так как  $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ , по формуле (\*) получаем

$$d(2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^2) = (1+1)(3+1)(2+1) = 24.$$

9. Приведите пример числа, имеющего а) ровно 6 делителей; б) ровно 7 делителей.

**10.** Докажите, что число  $n$ , дающее при делении на 3 остаток 2, имеет поровну делителей вида  $3l + 1$  и  $3s + 2$  и не является полным квадратом.

**11.** Окружность разбита на 720 одинаковых дуг. Сколько существует различных (по числу сторон) правильных многоугольников с вершинами в точках разбиения?

**12.** Сколько у числа  $n$  четных делителей (напишите общую формулу)? Для каких чисел  $n$  количество таких делителей равно  $\frac{1}{2}d(n)$ ?

**13.** В письменном столе имеется 9 ящиков. Сколькими способами можно разложить по ним пять разных книг?

**Решение.**  $9^5$  способов. Первую книгу мы можем положить 9 способами в тот или иной ящик, и, независимо от этого выбора, есть 9 способов выбрать ящик для второй книги, и т.д. По правилу произведения, всего способов  $9^5$ .

**14.** Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры нечетные?

**15.** Сколько существует пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

### § 3. Функция Эйлера. Включения и исключения

В § 2 мы познакомились с арифметической функцией  $d(n)$ . Еще чаще в теории чисел используется *функция Эйлера*:  $\varphi(n)$  – количество чисел, меньших числа  $n$  и взаимно простых с ним, т.е. таких чисел, которые не имеют с  $n$  общих делителей (кроме 1).

На рисунке 3 для примера выписаны числа от 1 до 18. Мы видим, что все взаимно простые с 18 числа разбиваются на пары  $(a; 18 - a)$ .

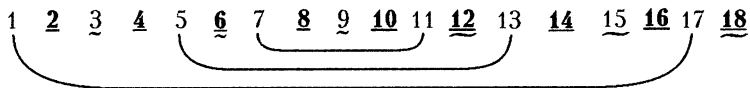


Рис. 3. Среди чисел от 1 до  $18 = 2 \cdot 3^2$  подчеркнуты все кратные 2 (прямой чертой) и все кратные 3 (волнистой). Подчеркнуты дважды (и прямой, и волнистой) – числа, кратные 6. Не подчеркнутых – взаимно простых с 18 – осталось  $\varphi(18) = 18 - 18/2 - 18/3 + 18/6 = 6$ . Они разбиваются на пары чисел, дающих в сумме 18

Такая симметрия будет для любого  $n > 2$ : если число  $a$  взаимно просто с  $n$ , то  $(n - a)$  также будет взаимно просто с  $n$  и не равно  $a$ . В самом деле, если бы  $n - a$  и  $n$  имели общий делитель  $p > 1$ , то их разность  $n - (n - a) = a$  имела бы тот же делитель  $p$ , тем самым  $n$  и  $a$  не были бы взаимно просты.

Из этой симметрии  $a \leftrightarrow (n - a)$  мы видим, что число  $\varphi(n)$  всегда четно (при  $n > 2$ ).

Покажем теперь, как находить  $\varphi(n)$ , зная разложение числа  $n$  на простые множители. Прежде всего, заметим, что если  $p$  простое, то  $\varphi(p) = p - 1$ , так как все числа  $1, 2, \dots, (p - 1)$  взаимно просты с  $p$  и меньше его. Пусть  $n = p^\alpha$ , где  $p$  – простое число и  $\alpha > 1$ . Тогда из  $n$  чисел, не превосходящих  $n$ , т.е. из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ , мы должны исключить те, которые делятся на  $p$ . Таких чисел  $\frac{n}{p} = \frac{p^\alpha}{p} = p^{\alpha-1}$ , поэтому

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} = n \left( 1 - \frac{1}{p} \right). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь числа  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$  с двумя различными простыми множителями. Подсчет  $\varphi(n)$  (для  $n = 18$  он проделан на рисунке 3) мы проиллюстрируем диаграммой на рисунке 4: квадрат изображает множество всех чисел от 1 до  $n$ , круги – это множества чисел, делящихся на  $p_1$  и  $p_2$  соответственно, пересечение кругов – множество чисел, делящихся на  $p_1 p_2$ .

Числа, взаимно простые с  $n$ , изображаются заштрихованной частью квадрата. Для определения их количества мы должны исключить  $N_1 = n/p_1$  чисел из первого куга,  $N_2 = n/p_2$  чисел из второго круга и прибавить  $N_{12} = n/p_1 p_2$  чисел, лежащих в пересечении кругов. Таким образом,

$$\varphi(n) = N - N_1 - N_2 + N_{12} = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1 p_2} = n \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_2} \right). \quad (2)$$

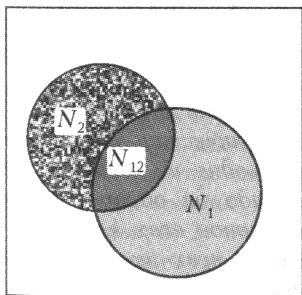


Рис. 4

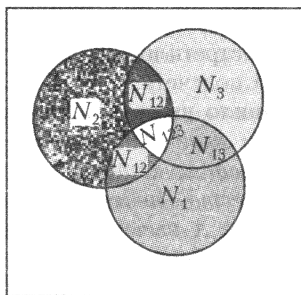


Рис.5. Если всего в квадрате  $N$  элементов, то вне кругов их  $N - N_1 - N_2 - N_3 + N_{12} + N_{23} + N_{31} - N_{123}$

Разобрать случай числа  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$  с тремя различными множителями нам поможет рисунок 5: квадрат изображает множество чисел, не превосходящих  $n$ , а круги – множества чисел, делящихся на  $p_1$ , на  $p_2$  и на  $p_3$ ; тогда в кругах будет соответственно  $N_1 = n/p_1$ ,  $N_2 = n/p_2$  и  $N_3 = \frac{n}{p_3}$  чисел, в их попарных пересечениях –  $N_{12} = \frac{n}{p_1 p_2}$ ,  $N_{13} = \frac{n}{p_1 p_3}$  и  $N_{23} = \frac{n}{p_2 p_3}$  чисел, а в пересечении всех трех кругов –  $N_{123} = \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$  чисел (это числа, делящиеся одновременно на  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ , т.е. на  $p_1 p_2 p_3$ ).

Мы должны подсчитать, сколько чисел содержится в квадрате, но не пропадает ни в один из кругов. Если мы вычтем из  $n$  суммы  $(N_1 + N_2 + N_3)$ , то числа, попавшие ровно в два из трех кругов, мы вычтем два раза, а числа, попавшие во все три круга – даже три раза.

Теперь к разности  $N - (N_1 + N_2 + N_3)$  добавим сумму  $(N_{12} + N_{13} + N_{23})$ . Тогда все числа, попадающие только в один и только в два круга, мы учтем правильно, и только числа, попавшие во все три круга одновременно – неправильно: их количество мы трижды вычли и вновь трижды прибавили. Придется из суммы  $N - (N_1 + N_2 + N_3) + (N_{12} + N_{13} + N_{23})$  вычесть еще  $N_{123}$ . Теперь все числа, вошедшие в объединение трех кругов, мы учли по разу и пришли к такой формуле:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_3} + \frac{n}{p_1 p_1} + \frac{n}{p_1 p_3} + \frac{n}{p_2 p_3} - \frac{n}{p_1 p_2 p_3} = \\ &= n \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_2} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_3} \right). \quad (3) \end{aligned}$$

Мы встретились здесь с частными случаями такого общего правила подсчета.

**Правило включений и исключений.** Пусть задано множество  $A$  и выделено  $k$  его подмножеств. Количество элементов множества  $A$ , которые не входят ни в одно из выделенных подмножеств, подсчитывается так: надо из общего числа элементов  $A$  вычесть количества элементов всех  $k$  подмножеств, прибавить количества элементов всех их попарных пересечений, вычесть количества элементов всех тройных пересечений, прибавить количества элементов всех пересечений по четыре и т.д. вплоть до пересечения всех  $k$  подмножеств.

Применяя это правило к подсчету  $\varphi(n)$ , где

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

и используя алгебраическое тождество

$$1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{k-1} x_k - x_1 x_2 x_3 - \dots \\ \dots - x_{k-2} x_{k-1} x_k + \dots + (-1)^k x_1 x_2 \dots x_k = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_k)$$

(его левая часть устроена как раз по правилу «включений и исключений»), можно получить общую формулу

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Заметим, что написанное выше алгебраическое тождество можно использовать и при доказательстве общего правила включений и исключений: положив некоторые  $j$  из  $k$  букв  $x_1, x_2, \dots, x_k$  равными 1, а остальные  $(k - j)$  — нулю, мы получим (при  $0 < j \leq k$ ) в правой части 0, а левая часть покажет, что элементы пересечения ровно  $j$  подмножеств одинаковое число раз прибавляются и вычитаются.

В заключение отметим, что функция  $\varphi(n)$  и функция  $d(n)$  из предыдущего параграфа обладают таким важным свойством, которое в теории чисел называется мультипликативностью:

*Если  $a$  и  $b$  взаимно просты, то  $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  и  $d(ab) = d(a)d(b)$ .*

(Убедитесь в этом самостоятельно.)

### Задачи

**16.** Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 288?

**17.** Найдите а)  $\varphi(96)$ ; б)  $\varphi(540)$ ; в)  $\varphi(1983)$ .

**18.** Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые а) делятся одновременно на 6 и на 15; б) делятся на 3, но не делятся на 7; в) делятся на 6 или на 15?

**19.** Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

**20.** Объединение множеств  $A$  и  $B$  состоит из 25 элементов, пересечение — из 10 элементов. Сколько элементов в множестве  $A$ , если в  $B$  а) 15 элементов; б) 21 элемент; в) 10 элементов?

**21.** В декабре было 10 ясных и безветренных дней, 15 дней был ветер и 12 дней шел снег. Сколько дней была метель (и снег, и ветер)?

**22.** В группе из 25 студентов 12 изучают латынь, 10 — греческий и 9 — санскрит. Для каждого двух языков найдется ровно 5 студентов, изучающих оба этих языка. Сколько студентов изучает все три языка?



**23.** На каждой стороне треугольника  $ABC$  отмечены по 9 точек, разбивающих ее на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна стороне треугольника  $ABC$ ?

### **Литература**

1. *И.М.Виноградов*. Основы теории чисел — М.: Наука, 1980.
2. *И.И.Ежов, А. В. Скороход, М.И.Ядренко*. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977.
3. *Л.А.Калужнин*. Основная теорема арифметики. — М.: Наука, 1969.
4. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел. —М.: Наука, Библиотечка «Квант», 1980.
5. *Л.А.Басова, М.А.Шубин, Л.А.Эпштейн*. Лекции и задачи по математике. — М.: Просвещение, 1981.
6. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1981.
7. *Р.Курант, Г.Роббинс*. Что такое математика? — М.: Просвещение, 1967.

## ПАРЫ ЧИСЕЛ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

---

### Уравнение $ax - by = c$ в целых числах

Рассмотрим уравнение

$$8x - 5y = 19.$$

На примере этого уравнения мы продемонстрируем метод решения в целых числах линейных уравнений вида  $ax - by = c$  с целыми  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Поскольку  $8 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 19$ , пара чисел  $x = 3$ ,  $y = 1$  является решением исходного уравнения. Это решение мы нашли простым подбором.

Покажем теперь, как, имея одно решение, можно записать все остальные решения (их бесконечно много). Вычитая из уравнения  $8x - 5y = 19$  равенство  $8 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 19$ , получаем  $8(x - 3) - 5(y - 1) = 0$ , или  $x - 3 = 5(y - 1)/8$ . Из последнего равенства видно, что число  $x - 3$  будет целым тогда и только тогда, когда  $y - 1$  делится на 8, т.е.  $y - 1 = 8n$ , где  $n$  — какое-нибудь целое число. Подставляя  $y - 1 = 8n$  в числитель дроби  $5(y - 1)/8$  и сокращая ее на 8, получаем  $x - 3 = 5n$ .

Тем самым, все целые решения исходного уравнения можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x = 3 + 5n, \\ y = 1 + 8n, \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix};$$

здесь  $n$  — любое целое число.

Второй вид записи будет подробно объяснен в следующем пункте, а сейчас заметим, что тем же методом получается формула для всех целых решений любого уравнения  $ax - by = c$  (где  $a$  и  $b$  — взаимно простые числа):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \quad (*)$$

где  $(x_0; y_0)$  — какое-нибудь одно его целое решение.

Для решения предложенных ниже задач надо иметь в виду следующие обстоятельства. Если целые числа  $a$  и  $b$  имеют общие делители (кроме 1 и  $-1$ ), то надо разделить все члены уравнения на их

---

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером.

наибольший общий делитель. В случае, когда  $c$  не делится на него, уравнение, очевидно, не имеет целых решений, а в случае, когда делится, такие решения существуют – надо только подобрать одно какое-нибудь решение и записать по формуле  $(*)$  все остальные.

Для любых чисел  $a$  и  $b$  имеется общий метод нахождения одного решения уравнения: этот метод основан на алгоритме Евклида (см. [1] и [5]).

### Упражнения

1. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах: а)  $7x - 5y = 0$ ; б)  $7x - 5y = 1$ ; в)  $15x - 9y = 6$ ; г)  $39x - 63y = 47$ ?

Если уравнение имеет решения, то укажите одно из них и запишите по общей формуле все его решения.

2. Сколько решений в натуральных (целых положительных) числах  $x$ ,  $y$  имеют уравнения:

а)  $19x + 85y = 1985$ ; б)  $7x + 5y = 99$ ?

3\*. Автомат делает на ленте длиной 2 м синие пометки от ее начала через каждые 7 см и красные пометки тоже от ее начала через каждые 5 см. Сколько раз синяя и красная пометки окажутся на расстоянии 1 см друг от друга?

### Пары чисел

Если решения уравнения с одним переменным  $x$  представляют собой отдельные числа, то решения уравнения с двумя переменными  $x$  и  $y$  – это уже пары чисел. В предыдущем пункте мы показали, как из одного целого решения уравнения  $ax - by = c$  получать все остальные решения: надо к одному его решению – паре чисел  $(x_0; y_0)$  – прибавить пару чисел  $(b; a)$ , умноженную на какое-нибудь целое число. Сейчас мы придадим точный смысл сложению пар чисел и умножению их на числа.

Для большей наглядности нам удобно пары чисел  $(x; y)$  записывать в виде *столбиков*  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ; а сами числа  $x$  и  $y$  мы будем называть соответственно первой и второй *компонентами* данной пары (столбика). (Не надо путать столбик  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  с дробью  $\frac{x}{y}$ !)

Два столбика считаются *равными* тогда и только тогда, когда равны их компоненты:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ только если } \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Сложить два столбика – это значит сложить их компоненты:

$$\text{пусть } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } u + v = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Так как от перемены мест слагаемых сумма чисел не меняется:  $a + b = b + a$ , то же самое можно сказать и про столбики:  $u + v = v + u$ . Для столбиков верно также правило  $(u + v) + w = u + (v + w)$ .

Умножить столбик  $u$  на число  $k$  – это значит умножить на  $k$  обе его компоненты:

$$\text{если } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{то } ku = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Особую роль, подобную той, которую для чисел играет число 0, для столбиков играет нулевой столбик  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Если это не приводит к путанице, то его обозначают тоже через «0». Для всякого столбика  $u$  верно равенство  $u + 0 = u$ .

Казалось бы, столь же естественно ввести умножение столбиков:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Для такого умножения выполнены все те же свойства, что и для умножения чисел: 1)  $uv = vu$ , 2)  $u(vw) = (uv)w$ , 3)  $(u + v)w = uw + vw$ . Роль «единицы» играет столбик  $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Но в отличие от чисел, здесь не всегда возможно деление на ненулевой столбик. Например, если  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то не существует столбика  $v$  такого, что  $uv \doteq e$ .

В конце статьи мы познакомимся с другим, как оказывается, тоже естественным и более содержательным правилом умножения пар чисел:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Это правило замечательно тем, что для него обратная операция – деление на ненулевой столбик – всегда возможна.

Пара чисел  $(x; y)$ , записанная не в виде столбика, а в виде строчки, используется обычно для обозначения координат точки на координатной плоскости  $Oxy$ . Метод координат позволяет связать алгебру с геометрией. Так, например, уравнение

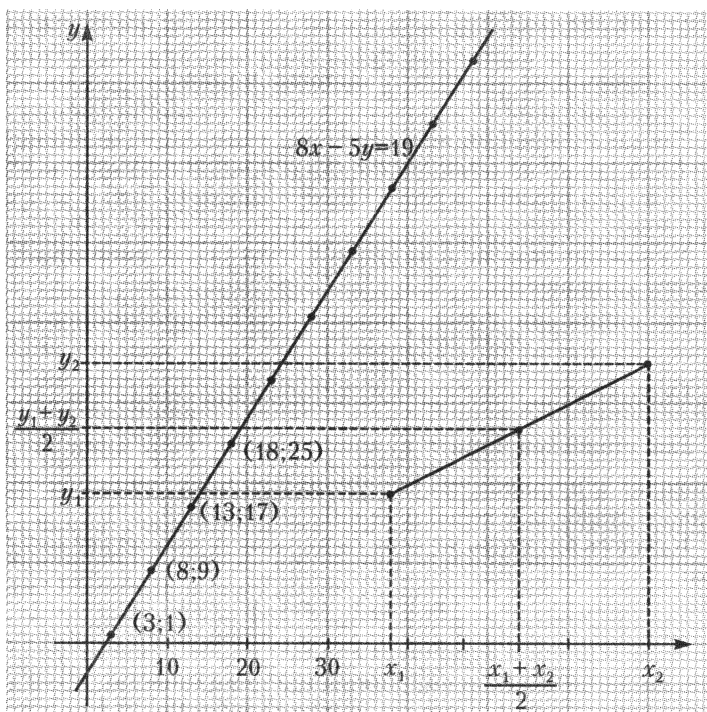


Рис. 1

$ax - by = c$  соответствует прямой на координатной плоскости, а целые решения этого уравнения – точкам с целыми координатами (рис.1). С помощью правил сложения пар чисел и умножения их на число можно записывать формулы для координат точек; например, если  $A = (x_1; y_1)$ ,  $B = (x_2; y_2)$  – две точки, то точка

$$C = \frac{1}{2}((x_1; y_1) + (x_2; y_2)) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

– середина отрезка  $AB$ .

### Упражнения

4. Даны столбики

$$u = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите столбики: а)  $2u$ ; б)  $2u - v$ ; в)  $u + 2v - 3w$ .

5. Найдите числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие равенству

$$x \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Сравните результат с 4, в).

6. а) Пусть даны точки  $A = (7; -1)$  и  $B = (-2; 5)$ . Найдите координаты такой точки  $C = (x; y)$ , что  $B$  – середина отрезка  $AC$ .

б) Найдите координаты точек  $D$  и  $E$ , которые делят отрезок  $AB$  на три равные части.

### Уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ в целых числах

В первом пункте мы показали, как, исходя из одного решения уравнения  $ax - by = c$ , получать и записывать бесконечную серию его решений. Подобный результат мы получим и для уравнения  $x^2 - dy^2 = 1$ , где  $d$  – натуральное число, не являющееся полным квадратом. Но для этого потребуются свой, более сложный метод. Мы продемонстрируем его на примере уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Это уравнение имеет очевидные решения  $(1; 0)$  и  $(-1; 0)$ . Ясно, что если  $(x; y)$  – решение уравнения, то  $(-x; y)$ ,  $(x; -y)$  и  $(-x; -y)$  – тоже решения. Поэтому можно ограничиться поиском только положительных (натуральных) решений. Вот два таких решения:  $(3; 2)$ ,  $(17; 12)$  – дальше в их поисках продвинуться трудно.

Неожиданную помощь здесь оказывает иррациональное число  $\sqrt{2}$ . Пользуясь тождеством  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , разложим левую часть уравнения  $x^2 - 2y^2 = 1$  на множители

$$(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$$

и подставим сюда наше первое решение в натуральных числах  $x = 3$ ,  $y = 2$ :

$$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1. \quad (2)$$

Оказывается, что второе решение можно получить, если, пользуясь тождеством  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , возвести в квадрат число  $3 + 2\sqrt{2}$  (или  $3 - 2\sqrt{2}$ ):

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2},$$

$$(3 - 2\sqrt{2})^2 = 9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2}.$$

Пара  $(17; 12)$  является вторым решением. Проверим это следу-

ющим образом. Возведем обе части верного равенства (2) в квадрат:

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 (3 - 2\sqrt{2})^2 = 1$$

и получим

$$(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) = 1, \text{ или } 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1.$$

Следующее новое решение можно получить, возведя число  $3 + 2\sqrt{2}$  в куб:

$$(3 + 2\sqrt{2})^3 = (3 + 2\sqrt{2})^2 (3 + 2\sqrt{2}) = 99 + 70\sqrt{2}.$$

Совершенно аналогично получим  $(3 - 2\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$ .  
Поскольку  $(3 + 2\sqrt{2})^3 (3 - 2\sqrt{2})^3 = 1$ , имеем

$$(99 + 70\sqrt{2})(99 - 70\sqrt{2}) = 99^2 - 70^2 \cdot 2 = 1,$$

т.е. (99; 70) – тоже решения уравнения  $x^2 - 2y^2 = 1$ .

Теперь, наверное, уже ясен способ получения новых решений – надо и дальше возводить  $3 + 2\sqrt{2}$  в степень, т.е. если

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2},$$

где  $x_n$  и  $y_n$  – натуральные числа, то пара  $(x_n; y_n)$  является решением уравнения  $x^2 - 2y^2 = 1$ . Можно доказать, что этот способ дает все его решения в натуральных числах.

Рассмотрим теперь более общее уравнение такого вида:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где  $d$  – натуральное число, не являющееся полным квадратом.

Оказывается, что все его решения в натуральных числах получаются таким же методом. Надо угадать самое меньшее его решение  $(x_0; y_0)$  и возвести число  $x_0 + y_0\sqrt{d}$  в степень  $n$ :

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}.$$

(Самым меньшим решением называется такое решение  $(x_0; y_0)$ , что для любого другого решения  $(x; y)$  выполняется неравенство  $x_0 + y_0\sqrt{d} < x + y\sqrt{d}$ .)

Для любых чисел  $d$  имеется общий метод нахождения наименьшего натурального решения, основанный на разложении чисел в цепные дроби (см. [1] и [2]).

### Упражнения

7\*. Найдите четыре решения в натуральных числах уравнения:

а)  $x^2 - 3y^2 = 1$ ; б)  $x^2 - 5y^2 = 1$ ; в)  $x^2 - 2y^2 = -1$ .

**8\*.** Докажите, что

$$x_n = \frac{1}{2} \left( (3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n \right), \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( (3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n \right)$$

– целые числа, удовлетворяющие уравнению  $x^2 - 2y^2 = 1$ , а) для  $n = 1, 2, 3$ ; б) для любого натурального  $n$ .

**9.** Найдите все целые решения уравнения  $x^2 - 4y^2 = 13$ .

**10\*.** Докажите, что уравнение  $x^2 - 3y^2 = -1$  не имеет решений в целых числах.

### Числа вида $p + q\sqrt{2}$

Обратим внимание на то интересное обстоятельство, что числу вида  $p + q\sqrt{2}$  с рациональными  $p$  и  $q$  можно естественно сопоставить пару чисел  $(p; q)$ . При этом равенство двух чисел  $p_1 + q_1\sqrt{2} = p_2 + q_2\sqrt{2}$  имеет место в том и только том случае, когда  $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ . В самом деле, пусть  $p_1 + q_1\sqrt{2} = p_2 + q_2\sqrt{2}$  и  $q_1 \neq q_2$ ; тогда получится, что  $\sqrt{2}$  равняется рациональному числу  $(p_1 - p_2)/(q_2 - q_1)$ , а это неверно. Следовательно, должно выполняться равенство  $q_1 = q_2$ ; но тогда из равенства  $p_1 + q_1\sqrt{2} = p_2 + q_2\sqrt{2}$  сразу получаем, что  $p_1 = p_2$ .

Правило сложения чисел  $p_1 + q_1\sqrt{2}$  и  $p_2 + q_2\sqrt{2}$  такое же, как для столбиков:

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ q_1 + q_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь перемножим числа  $p_1 + q_1\sqrt{2}$  и  $p_2 + q_2\sqrt{2}$ :

$$(p_1 + q_1\sqrt{2})(p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1p_2 + 2q_1q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{2}.$$

В результате мы приходим к числу такого же вида и получаем новое правило умножения для столбиков с рациональными компонентами  $p_1, q_1, p_2, q_2$ :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1p_2 + 2q_1q_2 \\ p_1q_2 + p_2q_1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Если следовать такому правилу, то можно записать решения уравнения  $x^2 - 2y^2 = 1$  так:  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}^n$  (возвести столбик в степень  $n$  – значит умножить столбик  $n$  раз на себя).

Для правила (3) выполнены обычные свойства умножения; роль единицы здесь играет столбик  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , так как он соответствует числу  $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ .



Оперировать с числами  $p + q\sqrt{2}$  очень помогает интересная симметрия в множестве таких чисел: каждому числу  $\alpha = p + q\sqrt{2}$  соответствует число  $\bar{\alpha} = p - q\sqrt{2}$ , которое называется *сопряженным* к  $\alpha$ . (Для столбиков переход к сопряженному означает просто изменение знака у второй компоненты.)

Для операции сопряжения выполнены такие свойства:

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha.$$

Но самое важное – это то, что произведение сопряженных чисел  $(p + q\sqrt{2})(p - q\sqrt{2}) = p^2 - 2q^2$  уже не содержит  $\sqrt{2}$ ;  $\alpha\bar{\alpha}$  – рациональное число. Это позволяет делить числа вида  $p + q\sqrt{2}$  друг на друга, получая при этом число такого же вида. Чтобы разделить  $\beta$  на  $\alpha$ , достаточно умножить  $\beta$  на  $\bar{\alpha}$  и разделить результат на  $\alpha\bar{\alpha}$ .

Мы уже пользовались парами сопряженных чисел при решении уравнения  $x^2 - 2y^2 = 1$ . Левую часть  $x^2 - 2y^2$  мы представили как произведение двух сопряженных чисел

$$\alpha = x + y\sqrt{2}, \quad \bar{\alpha} = x - y\sqrt{2}.$$

Возьмем теперь два числа  $\alpha = x_1 + y_1\sqrt{2}$  и  $\beta = x_2 + y_2\sqrt{2}$  и сопряженные к ним  $\bar{\alpha} = x_1 - y_1\sqrt{2}$  и  $\bar{\beta} = x_2 - y_2\sqrt{2}$ . Рассмотрим произведение  $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$ . Производя вычисления в определенном порядке – сначала  $\alpha\bar{\alpha}$ , потом  $\beta\bar{\beta}$  и затем  $(\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})$  – получаем

$$\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = (x_1^2 - 2y_1^2)(x_2^2 - 2y_2^2). \quad (4)$$

Если вычисление того же произведения  $\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}$  произвести в другом порядке, то мы получим

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (x_1x_2 + 2y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2}, \\ \bar{\alpha}\bar{\beta} &= (x_1x_2 + 2y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2}, \\ \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} &= (x_1x_2 + 2y_1y_2)^2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) получаем тождество

$$(x_1^2 - 2y_1^2)(x_2^2 - 2y_2^2) = (x_1x_2 + 2y_1y_2)^2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)^2. \quad (6)$$

Из этого тождества следует интересная связь между целыми решениями уравнений более общего вида  $x^2 - 2y^2 = c$ .

Если для пары чисел  $(x_1; y_1)$  выполнено равенство  $x_1^2 - 2y_1^2 = c_1$ , а для пары целых чисел  $(x_2; y_2)$  выполнено равенство  $x_2^2 - 2y_2^2 = c_2$ , то пара целых чисел  $(x_1x_2 + 2y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$  является решением уравнения  $x^2 - 2y^2 = c_1c_2$ .

Все сказанное про числа вида  $a + b\sqrt{2}$  верно и для чисел вида  $a + b\sqrt{d}$ , где  $d$  – простое число (или натуральное, не делящееся на квадрат). В частности, правило умножения для любого  $d$  будет

таким:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + d y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тождество (6) будет выглядеть так:

$$(x_1^2 - d y_1^2)(x_2^2 - d y_2^2) = (x_1 x_2 + d y_1 y_2)^2 - d (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2. \quad (8)$$

Замечательно, что это тождество выполнено вообще для всех чисел  $x_1, y_1, x_2, y_2, d$  — это можно непосредственно проверить, раскрыв скобки. В частности, оно верно и при  $d = -1$ ; получающееся при этом тождество будет играть центральную роль в следующем пункте.

### Упражнения

11. Перемножьте числа

$$(2 - \sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}).$$

12. Разделите числа, избавившись от иррациональности в знаменателе

$$\text{а) } \frac{9 + 4\sqrt{5}}{9 - 4\sqrt{5}}; \text{ б) } \frac{p_1 + q_1 \sqrt{d}}{p_2 + q_2 \sqrt{d}}.$$

13\*. Докажите, что произведение чисел вида  $x^2 + 5y^2$ , где  $x$  и  $y$  — целые числа, есть снова число того же вида. Найдите все такие числа, меньшие 100.

### Замечательное тождество и композиция Виета

Любые две пары чисел  $(a_1; b_1)$  и  $(a_2; b_2)$  связаны таким тождеством, известным еще Диофанту:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2. \quad (9)$$

Оно получается из тождества (8) при  $d = -1$  и часто используется в алгебре и теории чисел. Мы расскажем здесь о другом его применении: интересном способе, позволяющем получать из двух прямоугольных треугольников новый прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной произведению их гипотенуз.

Возьмем один прямоугольный треугольник с катетами  $a_1, b_1$  и гипотенузой  $c_1$  и другой — с катетами  $a_2, b_2$  и гипотенузой  $c_2$ . Поскольку по теореме Пифагора

$$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2, \quad a_2^2 + b_2^2 = c_2^2,$$

тождество (9) можно записать так:

$$(c_1 c_2)^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

Из этого равенства видно, что существует прямоугольный треугольник с катетами  $|a_1a_2 - b_1b_2|$ ,  $a_1b_2 + a_2b_1$  и гипотенузой  $c_1c_2$ . По-видимому, это впервые заметил в XVI веке французский математик Франсуа Виет (см. [7]), поэтому назовем такой способ получения из двух прямоугольных треугольников нового прямоугольного треугольника *композицией Виета*.

Рассмотрим два одинаковых прямоугольных треугольника с катетами  $m$ ,  $n$  и положим в тождестве (9)  $a_1 = a_2 = n$ ,  $b_1 = b_2 = m$ . Получим

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2.$$

Мы видим, что композиция Виета дает новый прямоугольный треугольник с катетами  $|m^2 - n^2|$ ,  $2mn$  и гипотенузой  $m^2 + n^2$ . Интересно, что все прямоугольные треугольники с целыми (взаимно простыми) сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – так называемые пифагоровы тройки – могут быть получены по этим формулам

$$c = m^2 + n^2, \quad a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad (10)$$

где  $m$  и  $n$  – (взаимно простые) натуральные числа разной четности  $m > n$ .

Самое же неожиданное заключается в том, что при композиции Виета двух прямоугольных треугольников получается новый прямоугольный треугольник (рис.2), у которого угол против катета  $a_1b_2 + a_2b_1$  равен сумме  $\varphi + \psi$  угол  $\varphi$  и  $\psi$  исходных треугольников против катетов  $b_1$  и  $b_2$  (если  $\varphi + \psi < 90^\circ$ ; если же  $\varphi + \psi > 90^\circ$ , то этот угол равен  $180^\circ - (\varphi + \psi)$ ). Таким образом, композицию Виета можно задать чисто геометрически. Композицией Виета двух прямоугольных треугольников является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной произведению гипотенуз, и углом, равным сумме соответствующих углов взятых треугольников.

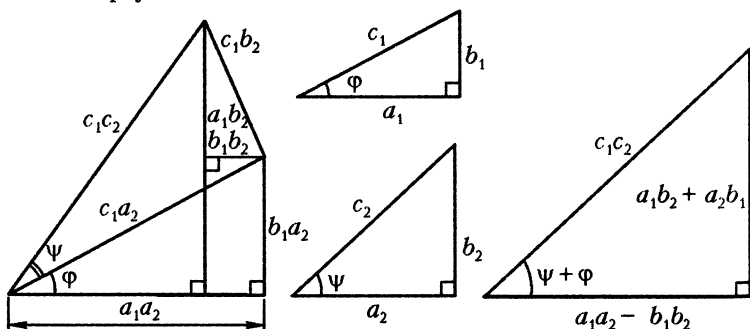


Рис. 2

## Упражнения

14. На клинописной табличке, изготовленной в древнем Вавилоне примерно 1500 лет до н. э., среди других пифагоровых треугольников указан такой: 4961, 6480, 8161. Каким  $m$  и  $n$  в формулах (10) он соответствует?

15\*. Найдите  $\cos 75^\circ$ , используя композицию Виета для двух прямоугольных треугольников с углами  $30^\circ$  и  $45^\circ$ .

16. В пифагоровых треугольниках со сторонами 5, 12, 13 и 7, 24, 25 гипотенуза на 1 больше одного из катетов.

а) Найдите еще два таких пифагоровых треугольника.

б) Найдите общую формулу для сторон таких треугольников.

в\*) Укажите среди них треугольники, у которых гипотенуза есть полный квадрат (как у треугольника 7, 24, 25:  $25 = 5^2$ ).

## Комплексные числа $a + bi$

В предыдущих пунктах мы с помощью чисел вида  $a + b\sqrt{d}$  пришли к тождеству (8), которое оказалось верным при любом  $d$ . Затем мы положили в этом тождестве  $d = -1$ ; при этом сами выражения  $a + b\sqrt{d} = a + b\sqrt{-1}$  потеряли смысл, так как среди чисел нет  $\sqrt{-1}$  — ведь квадрат любого числа является неотрицательным числом. Тем не менее оказывается целесообразным ввести в употребление новое «мнимое» число, квадрат которого равен  $-1$ . Его обозначают буквой  $i$  (от латинского слова *imaginaris* — мнимый, воображаемый).

Выражение вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — обычные числа, называют *комплексными числами*. Два комплексных числа, по определению, равны тогда и только тогда, когда равны их компоненты:  $a_1 + b_1i = a_2 + b_2i$ , только если  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ .

Сложение и умножение комплексных чисел  $a + bi$  производится аналогично тому, как они производились для чисел вида  $a + b\sqrt{2}$  с рациональными  $a$  и  $b$ . Однако здесь  $a$  и  $b$  могут быть любыми числами, а  $i^2 = -1$ . В результате этих операций мы снова получаем выражение вида  $a + bi$ :

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Мы видим теперь, откуда взялось умножение (1) столбиков, которое мы указали в разделе «Пары чисел». Это умножение по существу уже обсуждалось в предыдущем пункте — как композиция Виета двух прямоугольных треугольников с катетами  $(a_1; b_1)$  и  $(a_2; b_2)$ .

Особую роль играют *нулевое* комплексное число  $0 = 0 + 0i$ , *единица*  $1 = 1 + 0i$  и *мнимая единица*  $i = 0 + 1i$ . Заметим, что если какая-нибудь компонента  $a$  или  $b$  комплексного числа  $a + bi$  равна нулю, то соответствующую часть комплексного числа при записи опускают.

В мире комплексных чисел можно делить на любое число, отличное от нуля  $0 = 0 + 0i$ . Вычисляя частное двух чисел, удобно умножить оба эти числа на сопряженное число  $c - di$  к делителю  $z = c + di$ :

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i.$$

Комплексные числа возникли впервые в алгебре, в задачах о решении алгебраических уравнений третьей и более высокой степени. Однако применения комплексных чисел охватывают едва ли не все основные области математики и физики – геометрию, теорию чисел, математический анализ и теорию вероятностей, расчет электрических цепей, гидродинамику и квантовую механику.

Мы получили комплексные числа как пары действительных чисел, определив для них умножение правилом (1), удовлетворяющее естественным условиям – коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности. Для математики интересна задача классификации всех таких правил. Оказывается, все они укладываются в общую схему: пары  $(x; y)$  записываются в виде «обобщенных комплексных чисел»  $x + yj$  и  $j^2$  в вычислениях заменяется на  $r + sj$  ( $r, s$  – фиксированные числа, см. задачу 19); здесь возможны три существенно различных случая (к которым можно свести остальные): (1)  $j^2 = 1$  (к этому типу относится подробно изученное нами правило  $j^2 = 2$ ); (2)  $j^2 = 0$  (любопытно, что соответствующее правило умножения, записанное для столбиков:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

– это перевернутое правило сложения дробей

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 x_2 + x_2 y_1}{x_1 x_2} )$$

и, наконец, (3)  $j^2 = -1$  – настоящие комплексные числа.

### Задачи

**17.** Будем изображать комплексное число  $x + iy$  точкой  $(x; y)$  на координатной плоскости. Пусть  $u = 1 - i$ ,  $v = -2 + 5i$ . Найдите а)  $\bar{u}$ ; б)  $v$  ; в)  $uv$ ; г)  $u\bar{v}$ ; д)  $u/v$  и изобразите все эти числа на координатной плоскости.

18. Пусть  $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ,  $w = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ . Найдите а)  $z^2$ ,  $z^4$ ,  $z^8$ ; б)  $w^2$ ,  $w^3$ ,  $w^6$ ,  $w^2 + w + 1$ .

19\*. Пусть  $r$  и  $s$  – два фиксированных числа. Зададим умножение на парах чисел (всех, а не только рациональных) формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + ry_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 + sy_1y_2 \end{pmatrix}.$$

(Это правило соответствует умножению «обобщенных комплексных чисел»  $x + jy$ , где  $j^2 = r + sj$ .)

а) Проверьте, что для этого умножения выполнены основные свойства умножения 1)–3).

б) Какая пара  $e$  играет роль единицы?

в) При каких  $r$  и  $s$  для любой пары  $u$ , отличной от  $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , существует такое  $v$ , что  $uv = e$ ?

г) При каких  $r$  и  $s$  существует такая пара  $u \neq 0$ , что  $u^2 = 0$ ?

20. Зададим умножение пар чисел  $(a; b)$  так: каждой паре чисел  $(a; b)$  соответствует линейная функция  $u(t) = at + b$ , а произведению  $(a_1; b_1)$  на  $(a_2; b_2)$  соответствует композиция функций  $u_1(t) = a_1t + b_1$  и  $u_2(t) = a_2t + b_2$ , т.е. подстановка первой во вторую  $u_2(u_1(t)) = a_2(a_1t + b_1) + b_2 = a_2a_1t + a_2b_1 + b_2$ ; или

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 \\ a_2b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Какие из следующих законов выполнены для этого умножения:  $uv = vu$ ,  $(uv)w = u(vw)$ ,  $u(v + w) = uv + uw$ ,  $(u + v)w = uw + vw$ ?

## Литература

1. А.О.Гельфонд. Решение уравнений в целых числах. – М.: Наука, 1983. – (Популярные лекции по математике, вып.8. )

2. Ю.В.Нестеренко, Е.М.Никишин. Очерк о цепных дробях. – Квант, 1983, №5, 6.

3. Н.Вагутен. Сопряженные числа. – Квант, 1980, №2. – См. также первую часть настоящего сборника.

4. С.Ашманов. Числа и многочлены. – Квант, 1980, №2.

5. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1981.

6. Л.С.Понтрягин. Комплексные числа. – Квант, 1982, №4.

7. И.Г.Башмакова. Становление алгебры. – М.: Знание, 1979.

## ЗАДАЧА О ВОСЬМИ ТОЧКАХ

---

В этой заметке речь идет о задаче, предлагавшейся десятиклассникам в апреле 1984 года на Всесоюзной олимпиаде по математике в Ашхабаде. Приведем с незначительными изменениями ее формулировку.

**Задача 1.** *Около треугольника  $ABC$  описана окружность. Через произвольную точку  $P$  в плоскости треугольника (не лежащую на окружности) проводятся прямые  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  и отмечаются вторые точки их пересечения с окружностью. Докажите, что найдется не более 8 точек  $P$ , для которых отмеченные точки не совпадают ни с одной из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и служат вершинами треугольника, равного треугольнику  $ABC$ .*

Эта задача оказалась довольно трудной. Некоторые участники решали ее, перебирая разные расположения точки  $P$  относительно прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и окружности. Здесь приводится другое, более поучительное решение этой задачи, использующее «язык движений»: мы представим себе, что отдельные элементы нашей конфигурации вращаются, и в некоторый момент возникает нужная фигура.

Сначала решим следующую «обратную» задачу.

### Вращение и пересечения прямых

**Задача 2.** *В окружность вписаны два (не обязательно равных) треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Треугольник  $A_1B_1C_1$  закреплен, а треугольник  $ABC$  вращается вокруг центра окружности. При каком его положении прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  будут проходить через одну точку  $P$ ? Сколько будет таких положений?*

Дадим сразу ответ на второй вопрос (он будет использован ниже): такое положение лишь одно, т.е. за время полного оборота треугольника  $A_1B_1C_1$  прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  лишь однажды пересекутся в одной точке (а в некотором «вырожденном» случае такого положения вообще не будет).

Решить задачу 2 помогает метод геометрических мест.

**Лемма.** *Пусть хорда  $AB$  окружности закреплена, а хорда  $A_1B_1$  скользит концами по окружности. Тогда угол  $\varphi$  между прямыми  $AA_1$  и  $BB_1$  остается неизменным, а точка  $M$  пересе-*

чения этих прямых (если  $\varphi \neq 0$ ) описывает окружность, проходящую через точки  $A$  и  $B$  (рис.1).

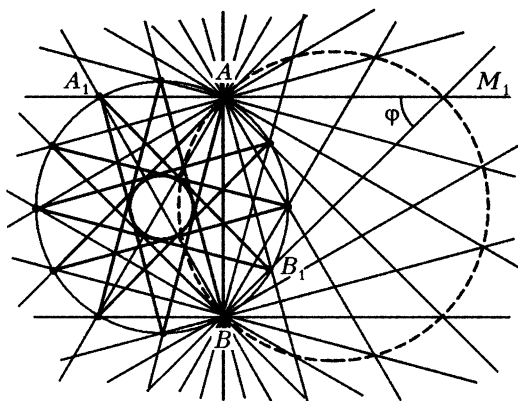


Рис.1. Если точки  $A$  и  $B$  закреплены, а точки  $A_1$  и  $B_1$  с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  движутся по окружности, то прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  вращаются с угловой скоростью  $\omega/2$ , а их точка пересечения  $M$  движется по пунктирной окружности (с угловой скоростью  $\omega$ )

Наметим доказательство леммы. Если точки  $A_1$  и  $B_1$  равномерно с одинаковой скоростью движутся по окружности, то прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  совершают равномерное вращение с одинаковой угловой скоростью вокруг точек  $A$  и  $B$ , а значит, угол между ними остается постоянным (на рисунке 1 для точек  $M$  по одну сторону от прямой  $AB$  угол  $AMB$  равен  $\varphi$  — углу между прямыми, а для точек  $M$  по другую сторону от  $AB$  угол  $AMB$  равен  $\pi - \varphi$ ). Если в начальный момент прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекались в некоторой точке  $M_1$ , то описанная около треугольника  $ABM_1$  окружность и будет искомой траекторией точки  $M$ , причем  $M$  также равномерно движется по окружности (угловая скорость вращения прямых равна половине угловой скорости вращения по своим окружностям точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $M$ ).

За этим наглядным рассуждением «на языке вращений» скрыто, как легко видеть, многократное использование теоремы о величине вписанного угла.<sup>1</sup>

К лемме нужно сделать два уточнения, которые окажутся существенными в дальнейшем.

<sup>1</sup> О «языке движений» в геометрии подробно рассказывается в книге Н.Б.Васильева и В.Л.Гутенмахера «Прямые и кривые» (М.: Наука, 1978).



1°. Особый случай  $\varphi = 0$  возникает, если хорды  $AB$  и  $A_1B_1$  равны по длине, причем в некоторый начальный момент времени точка  $A_1$  совпадает с  $B$ , а  $B_1$  с  $A$ . В этом случае в начальный момент прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  просто совпадают, а при дальнейшем движении будут все время параллельны друг другу.

2°. В тот момент времени, когда  $A_1$  совпадает с  $A$  (или  $B_1$  с  $B$ ), прямую  $AA_1$  (соответственно  $BB_1$ ) «по непрерывности» нужно считать направленной по касательной к данной окружности (или, если этого не делать, нужно исключить соответствующие две точки из найденного геометрического места – окружности).

Вернемся к задаче 2. Построим, пользуясь леммой, две окружности – геометрические места точек пересечения прямых  $AA_1$  и  $BB_1$ , а также  $BB_1$  и  $CC_1$  (рис.2). Первая проходит через

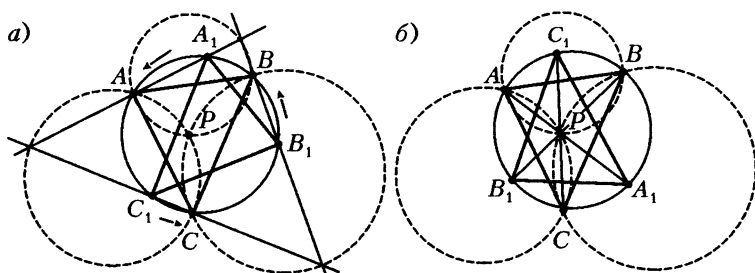


Рис.2. Точка  $P$  находится на пересечении двух геометрических мест: когда прямая  $BB_1$  повернется в положение  $BP$ , то  $AA_1$  и  $CC_1$  совпадут с  $AP$  и  $CP$

точки  $A$  и  $B$ , вторая – через точки  $B$  и  $C$ . На роль точки  $P$ , где должны пересекаться все три прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  (она, разумеется, не может лежать на данной окружности), годится лишь одна точка – отличная от  $B$  точка пересечения двух построенных окружностей. (Нам нет нужды строить геометрическое место точек пересечения  $AA_1$  и  $CC_1$  – третью окружность, проходящую через  $A$  и  $C$ , – она, конечно, автоматически пройдет через ту же точку  $P$  пересечения двух построенных окружностей.) Итак, вообще говоря, существует лишь одно положение треугольника  $A_1B_1C_1$ , удовлетворяющее нужному условию. В любом случае, с учетом сделанных выше уточнений, мы можем утверждать, что нужных точек  $P$  не более одной (особый случай изображен на рисунке 3). Задача 2 решена.

Теперь можно заняться задачей 1. Для каждой точки  $P$ , не лежащей на окружности, обозначим через  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  вторые

точки пересечения с окружностью прямых  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$ . Условие задачи выделяет те точки  $P$ , для которых треугольник  $A_1B_1C_1$  равен треугольнику  $ABC$ ; на первый взгляд может показаться, что, взяв в задаче 2 равные треугольники, мы найдем лишь один нужный  $\Delta A_1B_1C_1$  (симметричный треугольнику  $ABC$  относительно центра окружности). Но тут есть тонкость, не столько геометрическая, сколько логическая. Мы объясним ее после небольшого отступления.

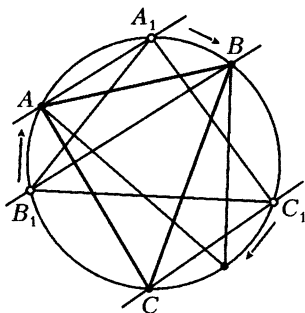


Рис. 3. Особый случай  $\varphi = 0$ , когда точка  $P$  не существует (прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  остаются параллельными)

### Перестановка вершин и симметрии

Все знают, что равные треугольники по определению имеют соответственно равные углы и стороны, так что их можно совместить наложением. В учебном пособии академика А.В.Погорелова «Геометрия 6–10» равенство треугольников  $\Delta ABC = \Delta DEF$ , вершины которых обозначены буквами, принято всегда записывать так, чтобы соответствующие вершины шли в одном и том же порядке (т.е. так, что  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle E$ ,  $\angle C = \angle F$ ,  $AB = DE$  и т.д.).

Прочитав еще раз условие задачи 1, можно заметить, что в этом смысле наш  $\Delta A_1B_1C_1$  не обязан равняться треугольнику  $ABC$  — он может быть равен (с учетом соответствия вершин) любому из шести треугольников  $ABC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$ ,  $BAC$ ,  $ACB$ ,  $CBA$ . И это число вариантов нужно еще удвоить, уже по чисто геометрической причине:  $\Delta A_1B_1C_1$  может быть, как говорят, «собственно равным» треугольнику  $ABC$  — т.е. может быть совмещен с ним непрерывным движением в плоскости (в нашей задаче — поворотом  $R$ ), либо «зеркально равным» — при этом для совмещения треугольников один из них нужно «перевернуть» (в нашей задаче достаточно сделать симметрию  $S$  относительно некоторой прямой; все треугольники  $A_1B_1C_1$ , зеркально равные треугольнику  $ABC$ , будут получаться друг из друга поворотами). Для различения этих случаев мы будем писать над равенством треугольников букву  $R$  или  $S$ . И для каждого из  $2 \cdot 6 = 12$  вариантов мы, применив задачу 2, можем построить (не более чем) одну нужную точку  $P$ .

Более наглядно это рассуждение можно пояснить так: мы

берем картонный треугольник  $T$  (с тем же радиусом описанной окружности, что и у треугольника  $ABC$ ), помещаем его вершины на окружность, положив на плоскость той или другой стороной, обозначаем их буквами  $A_1, B_1, C_1$  (6 способов) и, вращая его как в задаче 2, находим для каждого из  $2 \cdot 6$  вариантов точку  $P$ .

Чтобы закончить решение задачи 1, остается объяснить, почему в случае  $T = \Delta ABC$  исключаются 4 варианта. Один из них (случай  $\Delta ABC = \Delta A_1 B_1 C_1$ ) исключается сразу (здесь для каждой из трех сторон возникает особый случай  $1^\circ$  леммы – см. рис.3, – так что при вращении треугольника  $A_1 B_1 C_1$  прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  никогда не проходят через одну точку). Кроме того, условие, что точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  не должны совпадать ни с одной из вершин  $A, B, C$ , исключают случай  $\Delta BAC = \Delta A_1 B_1 C_1$  (рис.4), а также два аналогичных –  $\Delta ACB = \Delta A_1 B_1 C_1$  и

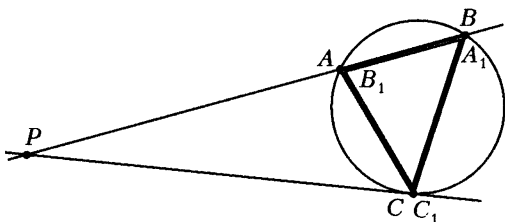


Рис.4. Особый случай: точка  $P$  возникает в момент совпадения треугольников

$\Delta CBA = \Delta A_1 B_1 C_1$ ; здесь точка  $P$  возникает в тот момент, когда треугольники полностью совпадают (и при этом проявляются сразу обе особенности  $1^\circ$  и  $2^\circ$ , см. рис.4). Задача 1 решена.

Тем, кто не ленится доводить начатое дело до конца, мы предлагаем подумать еще над следующими вопросами. 1) Верно ли, что в общем случае все 12 (а в случае  $T = \Delta ABC$  – все 8 не исключенных нами) вариантов реализуются и приводят, как правило, к разным точкам  $P$  (попробуйте поэкспериментировать с помощью циркуля и линейки)? 2) На сколько уменьшается число 12 (и – в частном случае – число 8) для равнобедренного или равностороннего треугольника  $T$ ?

## КОМБИНАТОРИКА – МНОГОЧЛЕНЫ – ВЕРОЯТНОСТЬ

---

Для чтения этой статьи достаточно знания курса математики в объеме первых шести классов, но мы уверены, что и старшеклассники найдут для себя здесь интересное – речь пойдет о комбинаторных формулах и их применениях. Одни и те же комбинаторные рассуждения и формулы пронизывают разные области математики и ее приложений. Цель статьи – показать одну такую связывающую линию: комбинаторика – алгебра многочленов – теория вероятностей.

### Факториал

Для вычисления суммы первых  $n$  натуральных чисел есть удобная формула

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для произведения первых  $n$  натуральных чисел такой формулы нет, но зато эта часто встречающаяся в комбинаторике и других разделах математики величина имеет специальное обозначение:  $n!$  (читается «эн факториал»). Выбор для обозначения восклицательного знака, возможно, связан с тем, что даже для сравнительно небольших значений  $n$  число  $n!$  очень велико: чтобы продемонстрировать, как быстро растет  $n!$  с ростом  $n$ , выпишем эти числа для  $n$  от 1 до 10:

$$\begin{aligned} 1! &= 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, 4! = 3! \cdot 4 = 24, 5! = \\ &= 4! \cdot 5 = 120, 6! = 720, 7! = 5040, 8! = 40\,320, 9! = \\ &= 362\,880, 10! = 3\,628\,800. \end{aligned}$$

Из определения  $n!$  видно, что факториалы двух соседних натуральных чисел  $n$  и  $n + 1$  связаны формулой

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1), \quad (*)$$

– чтобы получить произведение чисел от 1 до  $n + 1$ , надо произведение от 1 до  $n$  умножить еще на  $(n + 1)$ .

Заметим, что если в это равенство подставить  $n = 0$ , то получится  $1! = 0! \cdot 1$ , поэтому полагают  $0! = 1$ ; это соглашение часто оказывается удобным в различных общих формулах.

### Задачи

1. Найдите число  $n!$  для  $n = 11, 12$ .
2. Может ли  $n!$  кончатся ровно на пять нулей? (При каком наименьшем  $n$  число  $n!$  будет оканчиваться на шесть нулей?)
3. Докажите формулу  $(n + 1)! - n! = n! \cdot n$ .
4. Найдите сумму  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 9 \cdot 9!$ . (Замените каждый член на разность по формуле из предыдущей задачи.)
5. Проверьте равенство (где  $0 < k \leq n$ )

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

при  $n = 7$  и  $k = 3$  и докажите, что оно верно при любых натуральных числах  $n$  и  $k$ .

6. Найдите четыре тройки чисел  $x, y, z$ , для которых верно равенство  $x! \cdot y! = z!$ . (Подставьте в формулу  $(*)$   $n = k! - 1$ .)

### Перестановки

Факториал возникает самым естественным образом, когда мы подсчитываем количество перестановок из разных предметов.

Возьмем 4 буквы: К, О, Р, Т и посмотрим, сколькими способами их можно расположить в один ряд, т.е. сколько существует слов из этих букв. Оказывается, что число этих способов равно  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ . В самом деле, на первое место можно поставить любую из 4 букв, на второе — любую из 3 оставшихся, на третье — любую из 2 неиспользованных на первых двух местах букв, и, наконец, на четвертом месте окажется оставшаяся буква. Все эти перестановки выписаны в алфавитном порядке на рисунке 1. Перестановки букв некоторого слова называют его *анаграммами*.

Еще один пример. Рассмотрим все перестановки 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Их можно рассматривать как десятизнач-

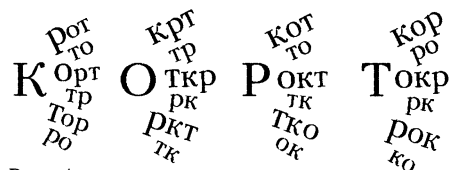


Рис. 1

ные числа, если они не начинаются с нуля, и как девятизначные числа, если они начинаются с нуля. Количество всех таких чисел равно  $10!$ .

Эти примеры иллюстрируют общее утверждение:

*Количество перестановок из  $n$  различных предметов равно  $n!$ .*

Часто требуется среди всех перестановок выбрать все те, которые обладают определенным свойством. Например, из написанных на рисунке 1 анаграмм слова КОРТ только одна (не считая самого слова корт) имеет смысл в русском языке: крот; а среди  $10!$  указанных чисел мы знаем четыре числа, которые делятся одновременно на все числа от 2 до 18: 2 438 195 760, 3 785 952 160, 4 753 869 120, 4 876 391 520. Для того чтобы найти осмысленные анаграммы или найти указанные числа среди  $10!$  чисел, нужно произвести перебор многих случаев. Подобные задачи постоянно возникают на производстве и в экономике, когда надо найти наилучшие варианты.

Перебор  $10!$  перестановок труден не только для человека, но даже для современной вычислительной машины. По этому поводу автор замечательного многотомного труда «Искусство программирования» Д.Кнут пишет: «Стоит помнить, что  $10!$  – это примерно 3,6 миллиона. В некотором смысле число  $10!$  является приблизительно границей между тем, что можно сосчитать на компьютере, и тем, что нельзя. Если алгоритм требует испытания более чем  $10!$  случаев, то счет может занять слишком много машинного времени, чтобы быть практически осуществимым. С другой стороны, если мы должны проверить  $10!$  случаев, и каждый случай требует, скажем, одной миллисекунды машинного времени, то общее время счета составит примерно один час». Поэтому интересно находить такие соображения, которые позволяют существенно сократить полный перебор или вообще избежать его.

## Задачи

7. а) Сколько анаграмм у слова НИСЕЛЬАП?

б) Найдите среди них два слова, одно – название фрукта, другое – породы собаки.

8. Найдите два девятизначных числа, составленных из всех цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, чтобы одно из них было больше другого в 8 раз.

9. а) Вершины нарисованного на плоскости правильного шестиугольника нужно обозначить буквами  $A, B, C, D, E, F$ . Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколько среди этих способов таких, что в результате получится шестиугольник  $ABCDEF$ ? (Буквы могут идти по часовой стрелке, а могут идти и против часовой стрелки.)

10. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

### Перестановки с повторениями

Отношения факториалов возникают при подсчете перестановок с повторениями. Например, число анаграмм слова

БАОБАБ равно  $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$ .

Поясним, почему это так. В этом слове 3 раза повторяется буква Б, 2 раза буква А и один раз буква О. Представим себе, что

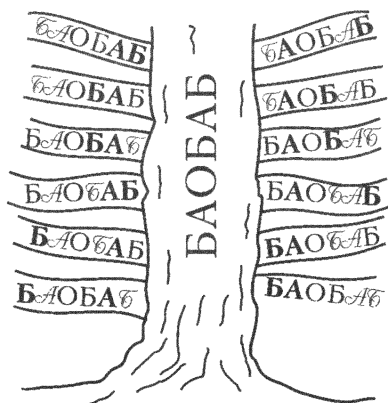


Рис. 2

все буквы в этом слове разные: три буквы Б и две буквы А можно раскрасить разными цветами. Итак, мы имеем 6 разных знаков, и количество их перестановок равно  $6!$ . Но тогда каждой анаграмме слова БАОБАБ: ОААБББ, БОААББ, ААОББА, ... соответствует  $3!2!$  перестановок (рис.2), ведь мы можем в нем  $3!$  способами переставить разноцветные буквы А.

Оказывается, что для числа перестановок с повторениями имеется общая формула.

Если слово имеет  $n_1$  букв  $A_1$ ,  $n_2$  букв  $A_2$ , ...,  $n_r$  букв  $A_r$ , то количество его анаграмм равно

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_r)!}{n_1!n_2!\dots n_r!}.$$

Конечно, эта формула применима для перестановок с повторениями любых предметов. Например, количество перестановок цифр 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3 равно

$$\frac{7!}{4!2!1!} = \frac{4!5 \cdot 6 \cdot 7}{4!2} = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 105.$$

### Задачи

11. Сколько различных анаграмм у слов: а) реестр; б) анаграмма?

12. Сколькими способами мама может в течение недели выдать дочке

3 банана, 2 груши и 2 апельсина, если каждый день будет давать ей по одному фрукту?

**13.** Расшифруйте фразу, в которой вместо каждого слова стоит его анаграмма:

**НЕДОВЖЕНЕ ЧАЙТЕТИ ЛУРАНЖ ВТАНК!**

**14.** Сколькими способами можно составить ожерелье из одной черной, двух белых, трех красных и пяти голубых бусинок?

### Степень суммы

Комбинации букв – анаграммы – естественно возникают при перемножении двух или нескольких многочленов, а комбинаторные коэффициенты – количества анаграмм – при приведении подобных членов.

Хорошо известна формула квадрата суммы двух чисел:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Похожую формулу можно получить и для квадрата суммы трех и большего числа слагаемых. Возведем, например, сумму  $a + b + c$  в квадрат:

$$\begin{aligned} (a + b + c)(a + b + c) &= \\ &= aa + ab + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac. \end{aligned}$$

Аналогичная формула верна и для  $(a + b + c)^2$  (на рисунке 3 каждый одночлен выражает площадь своего прямоугольника); вообще, квадрат суммы  $n$  чисел вычисляется так: надо сложить все квадраты этих  $n$  чисел и прибавить удвоенную сумму всевозможных попарных произведений этих чисел.

Если аккуратно перемножить  $a + b + c$  три раза на себя, получится такая формула:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + \\ &+ 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc. \end{aligned}$$

Объясним, как можно получить возникающие здесь коэффициенты 1, 3 и 6 без утомительного умножения и собирания подобных членов. Это – уже знакомые нам количества анаграмм.

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$aa$	$ab$	$ac$	$ad$
$b$	$ba$	$bb$	$bc$	$bd$
$c$	$ca$	$cb$	$cc$	$cd$
$d$	$da$	$db$	$dc$	$dd$

$$S = (a + b + c + d)^2$$

Рис. 3



Член  $a^3$  может получиться только одним способом – когда из каждой скобки

$$(a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)$$

берется буква  $a$ . Чтобы получить коэффициент при  $a^2b$ , нужно из одной скобки взять  $b$ , а из двух других  $a$ , т.е. этому члену соответствуют анаграммы  $aab$ ,  $aba$ ,  $baa$  из двух букв  $a$  и одной буквы  $b$ : их количество равно  $(2+1)!(2!1!) = 3$ . Наконец, коэффициент при  $abc$  равен числу  $3!/(1!1!1!) = 6$  анаграмм (перестановок) слова из трех различных букв  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Аналогичная формула получится и для куба суммы большего числа слагаемых, например

$$(a + b + c + d + e)^3 = (a^3 + \dots) + 3(a^2b + \dots) + 6(abc + \dots). \quad (**)$$

Здесь многоточием в каждой скобке обозначены члены, получаемые из первого выписанного члена всевозможными заменами букв.

Укажем теперь общую формулу.

*Коэффициент при  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_r^{n_r}$ , получающийся при возведении в  $n$ -ю степень суммы  $a_1 + a_2 + \dots + a_r$  из  $r$  слагаемых (здесь  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ ,  $n_1 \geq 0$ ,  $n_2 \geq 0$ , ...,  $n_r \geq 0$ ), равен числу анаграмм слова из  $n_1$  букв  $A_1$ ,  $n_2$  букв  $A_2$ , ...,  $n_r$  букв  $A_r$ , т.е.*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

(Разумеется, если некоторое число  $n_j$  равно 0, то  $a^{n_j} = 1$ , значит, буква  $a_j$  в таком одночлене отсутствует; напомним, что  $0! = 1$ .)

Вернемся к формуле (\*\*). Интересно, что вопрос: «сколько членов будет в каждой скобке?» также сводится к подсчету перестановок с повторениями. Выпишем в строчку все наши 5 букв и под каждой будем писать показатель, с которым она входит в соответствующий одночлен. (Если буква не входит в одночлен, то пишем показатель 0.) Тогда каждому одночлену в скобке ( $a^2 + \dots$ ) соответствует «слово» из 5 чисел: одной двойки, одной единицы и трех нулей, поэтому их общее количе-

	<i>abcde</i>		<i>abcde</i>		<i>abcde</i>
$a^2b$	21000	$a^3$	30000	$abc$	11100
$b^2c$	02100	$b^3$	03000	$abd$	11010
$b^2a$	12000	$c^3$	00300	$abe$	11001
...	...	...	...	...	...

Рис. 4

ство равно  $5!(3!1!1!) = 20$ ; в скобке  $(a^3 + \dots)$  будет столько же членов, сколько анаграмм у «слова» 30000, т.е.  $5!/(4!1!) = 5$ ; наконец, членов вида  $(abc + \dots)$  будет  $5!(3!2!) = 10$  (рис.4).

Можно проверить, что мы не ошиблись, подсчитав общее число всех одночленов до приведения подобных – иными словами, подставив в формулу (\*\*) вместо всех букв число 1; при этом слева получится  $5^3$ , а справа  $5 + 3 \cdot 20 + 6 \cdot 10$ .

### Задачи

15. Сколько членов получится после умножения:

$$(a + b + c + d)(x + y + z)(u + v)?$$

(Указание. Подставьте вместо букв единицы.)

16. Найдите наибольший коэффициент многочлена:

a)  $(a + b + c + d + e)^5$ ; б)  $(a + b + c + d)^5$ .

17. В формуле  $(a + b + c + d + e)^4 = K_1(a^4 + \dots) + K_2(a^3b + \dots) + K_3(a^2b^2 + \dots) + K_4(a^2bc + \dots) + K_5(abcd + \dots)$  найдите коэффициенты  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ . Сколько членов в каждой круглой скобке?

### Один способ подсчета вероятностей

Из повседневного опыта известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью  $1/2$  и маслом вверх – тоже  $1/2$ . Правда, некоторые считают, что вероятность первого исхода 0,9, а второго – 0,1. Но, наверное, никто не сомневается, что вероятность выпадения шестерки при бросании игрального кубика равна  $1/6$ , а двух шестерок подряд –  $1/36$ .

Эти примеры поясняют, что вероятность – это некоторое число между 0 и 1, количественно выражающее шанс наступления того или иного исхода (маслом вниз или вверх) случайного события (падения бутерброда), причем сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1.

После того, как каждому исходу приписана некоторая вероятность, интересно находить вероятности более сложных событий. Эта задача включает в себе большие математические трудности. Один из способов подсчета вероятностей сложных событий связан с таким простым наблюдением: если сумма нескольких положительных чисел равна 1, то степень этой суммы тоже равна 1. Оказывается, что каждому одночлену, возникающему при возведении суммы в степень, можно придать вероятностный смысл. Как это делается – покажем на таком искусственном примере.

В магазине лежит большая куча перцев, причем  $1/3$  из них – красные,  $1/2$  – желтые,  $1/6$  – зеленые. Если продавец, не глядя, выбирает из кучи один перец, то мы полагаем вероятность, что он

окажется красным (к), равной  $1/3$ , желтым (ж)  $1/2$ , зеленым (з)  $1/6$ .

Если продавец выбирает, не глядя, два перца, то возможны такие случаи: кк, кж, кз, жк, жз, жж, зк, зж, зз. Вероятность каждого из них считается равной произведению вероятностей появления отдельных букв, составляющих пару:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

Сумма всех 9 чисел равна 1, так как они появляются при возведении в квадрат числа  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$ .

Чтобы найти вероятность того, что среди двух взятых перцев есть красный и зеленый, надо сложить вероятности случаев кз и зк:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

Обратим внимание на то, что это действие соответствует следующему: надо возвести  $(\kappa + \text{з} + \text{с})$  в квадрат и привести подобные члены кз и зк – в результате получится  $2\kappa\text{з}$ , а затем подставить вместо букв  $\kappa$  и  $\text{з}$  их вероятности.

Пользуясь правилом нахождения коэффициента при возведении в степень, можно определять и вероятности более длинных комбинаций. Например, если продавец, не глядя, выбирает один за другим пять перцев, то вероятность, что среди них окажется 3 красных, 1 желтый и 1 зеленый, вычисляется так:

$$\frac{5!}{3!1!1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{81},$$

ведь  $\frac{5!}{3!1!1!} \kappa^3 \text{жз}$  – это одночлен, который получится в многочлене  $(\kappa + \text{ж} + \text{з})^5$  после возведения в степень и приведения подобных членов, т.е. сумма вероятностей анаграмм слова кккжз.

Интересно, что случаи «2 красных и 3 желтых», а также «2 красных, 2 желтых и 1 зеленый» имеют одинаковую вероятность

$$\frac{5!}{2!3!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{2!2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}.$$

(Это – наиболее вероятные комбинации 5 перцев при выбранных нами вероятностях.)

### Задачи

**18.** Все три ребра куба  $6 \times 6 \times 6$ , исходящие из вершины А, поделили в отношении 3:2:1, считая от вершины А, и через точки деления провели плоскости, параллельные граням, разрезающие кубик на 21 кусок.

- а) Сколько из них будут брусками  $3 \times 2 \times 1$  ?  
 б) Сколько еще и каких будет кусков? Каковы их объемы?  
 в) Имеется ли связь между этой задачей и задачей про перцы?

19. Автомат составляет ожерелья из 6 бусинок, выбирая их случайно из большой кучи черных, белых, красных и голубых бусинок, смешанных в соотношении 1:2:3:4. С какой вероятностью в таком ожерелье

- а) все бусинки голубые;  
 б) все – одного цвета;  
 в) не будет ни одной красной бусинки;  
 г) встретятся бусинки всех четырех цветов?  
 д) Какие ожерелья будут попадаться чаще всего?

е) Каким нужно взять соотношение бусинок в большой куче, чтобы чаще всего встречались ожерелья с 2 красными, 2 черными, одной белой и одной голубой бусинками?

20. Пусть вероятность падения бутерброда маслом вниз равна  $3/4$ . Произошло случайное событие: поднос с семью бутербродами опрокинулся. Какова вероятность, что ровно  $k$  бутербродов упадут маслом вниз (для каждого  $k = 0, 1, 2, \dots, 7$ )?

Возведите в степень  $(p+q)^7$  и подсчитайте каждый одночлен при  $p = 3/4$ ,  $q = 1/4$ . Для вычислений коэффициентов можно воспользоваться микрокалькулятором.

### Биномиальные коэффициенты

Выше мы почти не затрагивали самый простой и, пожалуй, самый важный случай двух букв. Коэффициенты многочлена  $(a+b)^n$  имеют специальное обозначение  $C_n^k$ , а формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

называется формулой *бинома Ньютона*. Мы знаем, что  $C_n^k$  – количество слов из  $n$  букв, среди которых  $k$  букв  $b$  и  $n-k$  букв  $a$  – можно найти по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Например,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

поскольку

$$C_4^0 = C_4^4 = \frac{4!}{4!0!} = 1,$$

$$C_4^1 = C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4, \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Биномиальные коэффициенты – числа  $C_n^k$  – возникают в самых различных задачах комбинаторики, алгебры, геометрии, математичес-

кого анализа, теории вероятностей. Они связаны многочисленными красивыми тождествами; например, из равенства  $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$  (см. задачу 5) следует, что при всех натуральных  $n$  и  $k$ ,  $0 \leq k < n$ ,

$$C_k^k + C_{k+2}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$$

(для  $k = 1$  это – формула, с которой мы начали статью).

### **Литература**

1. *В.А.Успенский*. Треугольник Паскаля. – М.: Наука, 1979.
2. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: Алгебра и анализ. – М.: Наука, 1982. – (Серия: Библиотечка «Квант», вып.22).
3. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1982. – (Серия: Библиотечка «Квант», вып.23).
4. *Д.Кнут*. Искусство программирования для ЭВМ. – М.: Мир, 1976, т.1.
5. *Ф.Мостеллер*. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. – М.: Наука, 1985.

## ГЕКСАГРАММЫ ПАСКАЛЯ И КУБИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

В 1640 году Блез Паскаль (ему шел тогда семнадцатый год) обнаружил замечательное свойство шестизвенной замкнутой ломаной, вписанной в окружность. В возникающей конфигурации (рис.1), которую Паскаль назвал «мистической

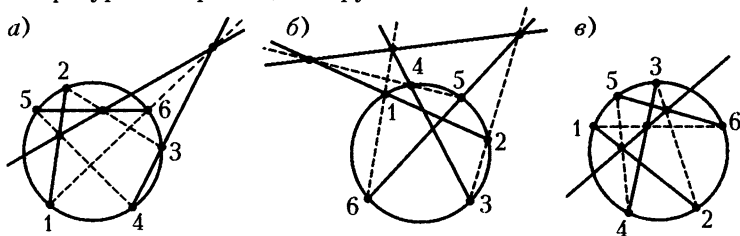


Рис.1. Теорема Паскаля. Какие бы шесть точек ни взять на окружности и как ни занумеровать их числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, точки пересечения прямых 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61 будут лежать на одной прямой (ее называют прямой Паскаля вписанного шестиугольника 123456). Другая формулировка: точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника или их продолжений лежат на одной прямой

гексаграммой», некоторые три точки пересечения неизбежно оказываются лежащими на одной прямой. Свое открытие Паскаль опубликовал в виде афиши, изданной в пятидесяти экземплярах для раздачи и пересылки отдельным ученым. Работа Паскаля и вышедшее четырьмя годами раньше небольшое сочинение Жерара Дезарга «Образец одного из общих способов для употребления перспективы» послужили фундаментом новой математической дисциплины – *проективной геометрии*. Именно тогда было осознано, что «древние знали не все» (выражение Пьера Ферма), – до тех пор достижения геометров Древней Греции считались непревзойденными.

С именем одного из последних античных геометров – Паппа Александрийского, жившего в III веке н. э., – связана теорема о шестизвенной ломаной, похожая на теорему Паскаля; с нее мы и начнем рассказ.

Очень советуем провести экспериментальную проверку этих теорем: сделать несколько крупных и аккуратных чертежей – это

не только убедит вас в справедливости теорем, но и позволит понять восторг, охвативший в свое время Паскаля и его современников (а быть может, и Паппа).

На геометрических доказательствах и многочисленных следствиях теорем Паппа и Паскаля мы не будем задерживаться, затронув лишь одну поучительную тему – использование геометрических преобразований, в том числе центрального проектирования. Наша главная цель – показать, что свойства «гексаграмм» – лишь частные проявления более общего факта, относящегося к алгебраической геометрии, одному из самых глубоких разделов математики XIX – XX веков. Мы увидим, что тот же факт объясняет и основное свойство операции «сложения точек» на кубической кривой.

В заключительной серии рисунков точки трех цветов и соединяющие их прямые образуют конфигурации, где удивительные совпадения точек пересечения (которые в конфигурациях Паппа и Паскаля возникают однажды) происходят бесконечное число раз.

### Теоремы Паппа

Начнем со сравнительно простой теоремы о шести точках, лежащих на двух прямых  $a$  и  $b$  (рис.2,а).

**Теорема 1,а.** Пусть вершины шестизвенной замкнутой ломаной лежат попеременно на двух прямых. Если две пары противоположных звеньев этой ломаной (1-е и 4-е, 2-е и 5-е) параллельны, то и оставшаяся пара звеньев (3-е и 6-е) параллельна.

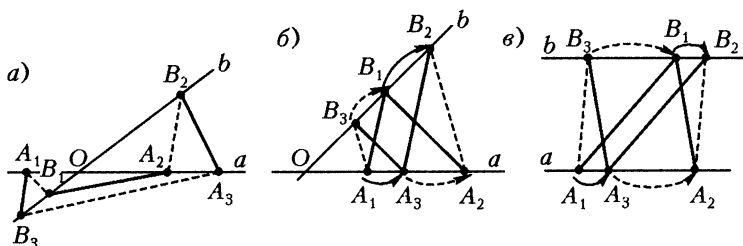


Рис.2. Гексаграммы Паппа. Шесть вершин ломаной  $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$  лежат попеременно на двух прямых  $a$  и  $b$ : первые четыре строятся произвольно, затем  $A_3$  и  $B_3$  строятся так, что  $B_2A_3 \parallel A_1B_1$ ,  $A_3B_3 \parallel B_1A_2$ ; тогда обязательно  $B_3A_1 \parallel A_2B_2$  (теорема 1,а). Доказательство: а), б) перемножив равенства  $OA_1/OA_3 = OB_1/OB_2$  и  $OA_3/OA_2 = OB_3/OB_1$ , получим  $OA_1/OA_2 = OB_3/OB_1$ ; в) сложив равенства  $\overline{A_1A_3} = \overline{B_1B_2}$  и  $\overline{A_3A_2} = \overline{B_3B_1}$ , получим  $\overline{A_1A_2} = \overline{B_3B_2}$

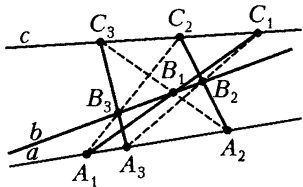
Идею доказательства поясним с помощью геометрических преобразований. Пусть прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $O$  (рис.2,б). Рассмотрим две гомотетии с центром  $O$ : одну – переводящую прямую  $A_1B_1$  в  $A_3B_2$ , и другую – переводящую  $A_3B_3$  в  $A_2B_1$ . Их композиция – результат последовательного выполнения этих гомотетий – переводит прямую  $A_1B_3$  в  $A_2B_2$ , поэтому  $A_1B_3 \parallel A_2B_2$ . Заметим, что следить за преобразованиями точки  $A_1$  удобно, применяя гомотетии в одном порядке:  $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2$ , а точки  $B_3$  – в другом:  $B_3 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2$ . Результат, конечно, не зависит от порядка применения двух гомотетий: их композиция – это тоже гомотетия с центром  $O$ , коэффициент которой равен произведению коэффициентов этих двух гомотетий. В случае, когда прямые  $a$  и  $b$  параллельны (рис.2,в), в том же рассуждении гомотетии нужно заменить параллельными переносами.

Таким образом, теорема 1,  $a$  – это просто геометрическое выражение коммутативности умножения (и сложения) чисел; это объясняет важную роль теоремы Паппа в основаниях геометрии (см., например, книгу [5]).

Теорема Паппа о 6 точках – лишь очень специальный случай значительно более глубокой теоремы (также носящей его имя) о конфигурации, состоящей из 9 точек и 9 прямых (рис.3).

**Теорема 1.** Пусть три сплошные прямые  $A_1C_1$ ,  $A_2C_2$ ,  $A_3C_3$  пересекают три пунктирные прямые  $A_1C_2$ ,  $A_2C_3$ ,  $A_3C_1$  в девяти точках. Если две тройки этих точек лежат на двух прямых (отличных от перечисленных), то и оставшаяся тройка точек лежит на прямой.

Рис.3. Конфигурация Паппа из 9 точек и 9 прямых. Какие бы тройки точек  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  на прямых  $a$  и  $b$  ни взять, точки  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $A_3B_2$ ,  $A_2B_2$  и  $A_1B_3$ ,  $A_3B_3$  и  $A_2B_1$  будут лежать на одной прямой (теорема 1)



Конфигурация Паппа замечательна тем, что все три тройки прямых – тонких, толстых и пунктирных (см. рис.3) – участвуют в ней совершенно равноправно: в каждой из 9 точек пересекаются три прямые разных типов.

Начав строить такую конфигурацию, мы обнаружим, что при неудачном выборе первых шести точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $A_3$ ,  $B_3$  новые точки  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  могут оказаться далеко за пределами чертежа. Например, при  $A_1B_1 \parallel A_3B_2$  точка  $C_1$  просто «уйдет в



бесконечность». (При этом прямая  $C_2C_3$  будет также параллельна  $A_1B_1$  и  $B_2A_3$ .) Если же две из трех точек  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  «уходят в бесконечность», то согласно теореме 1,а и третья также должна оказаться в бесконечности»; в этом случае удобно говорить, что все три точки  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  лежат на одной «бесконечно удаленной прямой»  $c$ .

К этому частному случаю можно свести и самый общий с помощью геометрического преобразования, хорошо знакомого художникам, архитекторам и фотографам – *центральной проекции* (рис.4); художники со времен Леонардо да Винчи и

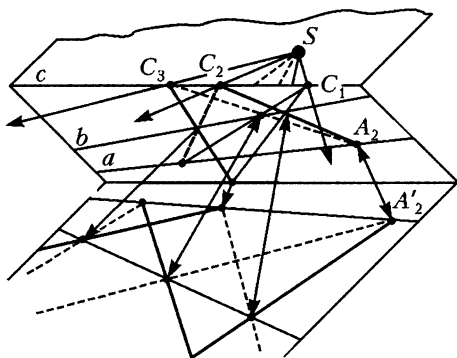


Рис.4. Сведение общей теоремы Паппа к специальному случаю (теореме 1,а). Нарисуем конфигурацию Паппа на стекле или прозрачной бумаге, расположим ее в наклонной плоскости так, чтобы прямая  $C_1C_2$  была горизонтальной, и спроектируем на горизонтальную плоскость с помощью источника света  $S$  – центра проекций, – расположенного над плоскостью на той же высоте, что и прямая  $C_1C_2$ . В проекции получится гексаграмма Паппа: пары разнотипных прямых, пересекающихся в точках  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , проектируются в пары параллельных прямых, поэтому  $C_3$  лежит на прямой  $C_1C_2$

Альбрехта Дюрера называют его «линейной перспективой». Проекция с центром  $S$  каждой точке  $M$  ставит в соответствие точку  $M'$  пересечения прямой  $SM$  с некоторой плоскостью  $p$  (плоскостью проекции). Важно, что при этом образы точек одной прямой вновь лежат на одной прямой, хотя некоторые пересекающиеся прямые переходят в параллельные (их точка пересечения «уходит в бесконечность») и наоборот.

Замечательна идея Дезарга, лежащая в основе проективной геометрии: мысленно дополнить плоскость «бесконечно удаленными точками», в каждой из которых пересекаются параллельные друг другу

прямые, и считать все эти точки лежащими на одной «бесконечно удаленной прямой» – тогда при центральной проекции одной плоскости на другую не возникает никаких исключений, это преобразование становится взаимно однозначным. Эта «проективная» точка зрения будет постоянной побочной темой нашего рассказа, но мы не будем развивать ее здесь подробно (см. [1], [2]).

### Конфигурации Паскаля

Теореме Паскаля можно придать тот же вид, что и теореме Паппа о 9 точках.

**Теорема 2.** *Пусть три пунктирные прямые пересекают три сплошные в девяти точках. Если шесть из этих точек лежат на одной окружности, то три остальные лежат на одной прямой (рис.1).*

Верна и в определенном смысле «обратная» теорема.

**Теорема 2'.** *Если из девяти точек пересечения тройки пунктирных с тройкой сплошных прямых три лежат на прямой, а еще пять – на окружности, то и девятая точка лежит на той же окружности.*

Как понял сразу же сам Паскаль, его теорему можно значительно обобщить: вместо окружности в ней может фигурировать эллипс, гипербола или парабола, ибо любую из этих кривых можно получить центральной проекцией окружности. Поэтому из конфигурации Паскаля для окружности можно получить конфигурацию для любой из этих кривых.

Все эти кривые называются *кривыми второго порядка*, поскольку каждую из них можно задать уравнением вида  $P(x, y) = 0$ , где  $P$  – многочлен второй степени:

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Любопытно, что теорема Паскаля остается верной и для вырожденного случая, когда многочлен  $P$  раскладывается на два линейных множителя: в этом случае кривая второго порядка  $P(x, y) = 0$  превращается в пару прямых, а теорема Паскаля – в теорему Паппа.

Существует много различных доказательств теоремы Паскаля для окружности (см., например, [1], [2], [3]).

Интересно, что доказать ее можно тем же способом, каким мы свели общую теорему Паппа к частному случаю – спроектировать конфигурацию Паскаля так, чтобы «паскалева прямая» превратилась в бесконечно удаленную, а окружность – в зависимости от того, пересекалась ли она с прямой  $s$ , касалась ее или не имела с ней общих точек – в гиперболу

с перпендикулярными асимптотами, параболу или вновь в окружность. Теперь остается доказать аналог теоремы 1, а для шестизвенной ломаной, вершины которой лежат на одной из полученных кривых. Для этого нужно придумать преобразования, при которых кривая скользила бы по самой себе, а параллельные прямые переходили бы в параллельные (такие преобразования называют *линейными*). Для окружности это – обычные повороты, для параболы  $y = ax^2$  «неравномерные растяжения»  $x' = kx$ ,  $y' = k^2y$ , для гиперболы  $xy = a$  – «гиперболические повороты»  $x' = kx$ ,  $y' = y/k$ .

### Кубические кривые

Алгебраической кривой третьего порядка, или *кубической кривой*, называется множество точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению  $P(x, y) = 0$ , где  $P$  – многочлен третьей степени:  $P(x, y) = ax^3 + bx^2y + \dots + l$  (всего 10 членов). Заметим, что это определение не зависит от выбора системы координат: при переходе от одной системы координат к другой, даже косоугольной, старые координаты выражаются через новые по линейным формулам

$$x = a_1x' + b_1y' + c_1, \quad y = a_2x' + b_2y' + c_2, \quad (1)$$

поэтому в новых координатах кривая будет задаваться также многочленом третьей степени.

Кубическая кривая называется *приводимой*, если многочлен  $P(x, y)$  раскладывается в произведение многочленов меньшей (первой и второй) степени, и *неприводимой* – в противном случае. Такую кривую мы будем обозначать иногда буквой  $\Omega$  – некоторые из очень разнообразных по форме кубических кривых имеют похожий вид. Например, кривая  $(x + 1)(x^2 + y^2 - 1) + \varepsilon = 0$  при малом  $\varepsilon$  (скажем,  $\varepsilon = 0,001$ ) очень близка к приводимой кривой  $(x + 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0$ , состоящей из прямой  $x = -1$  и окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Если многочлен раскладывается в произведение трех линейных многочленов:  $P = L_0L_1L_2$ , то кривая  $P(x, y) = 0$  будет объединением трех прямых  $L_0 = 0$ ,  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$ .

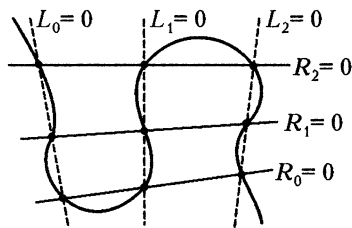
Оказывается, любой многочлен третьей степени можно представить в виде суммы двух таких «сильно приводимых» многочленов; это будет видно из доказательства следующей теоремы о 9 точках на кубической кривой.

**Теорема 3.** Пусть три пунктирные прямые пересекают три сплошные в девяти точках. Если восемь из этих точек лежат на некоторой кубической кривой, то и девятая лежит на той же кубической кривой.

В специальном случае, когда кривая приводима, отсюда получаются теоремы Паппа и Паскаля: если кривая распадается на три прямых, то теорема 3 превращается в теорему 1, а если на прямую и кривую второго порядка, то в теоремы 2 и 2'. Таким образом, доказав теорему 3, мы получим одновременно все предыдущие результаты, причем сразу в общем случае!

Пусть прямые  $R_i = 0$  и  $L_j = 0$  пересекаются в точке  $A_{ij}$  (рис.5;  $i$  и  $j$  принимают значения 0, 1 и 2). Докажем, что если все точки  $A_{ij}$ , кроме  $A_{22}$ , лежат на кубической кривой  $P(x, y) = 0$ ,

*Рис.5. Теорема 3 о 9 точках на кубической кривой. Уравнение кубической кривой  $\Omega$ , проходящей через 8 из 9 точек, можно получить как линейную комбинацию уравнений  $R_0R_1R_2 = 0$  и  $L_0L_1L_2 = 0$ , задающих тройки сплошных и пунктирных прямых:  $\lambda R_0R_1R_2 + \mu L_0L_1L_2$ , поэтому кривая  $\Omega$  обязательно проходит и через девятую точку*



то и  $A_{22}$  – тоже. Положим  $K = L_0L_1L_2$ ,  $\Gamma = R_0R_1R_2$  и докажем, что для некоторых чисел  $\lambda$  и  $\mu$  выполнено тождество  $P = \lambda K + \mu \Gamma$ . Отсюда будет следовать, что  $P = 0$  в точке  $A_{22}$ : ведь  $K = 0$  на пунктирных прямых,  $\Gamma = 0$  на сплошных, так что в точках пересечения выполнены оба эти равенства.

Удобно считать, что прямые  $L_0 = 0$  и  $R_0 = 0$  – это оси координат, так что  $L_0(x, y) = x$ ,  $R_0(x, y) = y$  (этого можно добиться, заменив переменные по формулам (1)); при этом  $K(x, y)$  имеет вид

$$x(x - \alpha_1 - \gamma_1 y)(x - \alpha_2 - \gamma_2 y),$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – координаты точек  $A_{01}$  и  $A_{02}$  на оси  $Ox$ . Поскольку кривая  $P(x, y) = 0$  проходит через точки  $A_{00}$ ,  $A_{01}$  и  $A_{02}$ , многочлен  $P(x, 0)$  – т.е. многочлен  $P$ , рассматриваемый на оси  $y = 0$ , – обращается в 0 при  $x$ , равном 0,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , поэтому  $P(x, 0) = \lambda x(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$  при некотором  $\lambda$ , откуда  $P(x, 0) = \lambda K(x, 0)$ . Аналогично докажем, что  $P(0, y) = \mu \Gamma(0, y)$  при некотором  $\mu$  (здесь используются точки  $A_{00}$ ,  $A_{10}$  и  $A_{20}$ ).

Рассмотрим теперь многочлен  $G = P - \lambda K - \mu \Gamma$ . Он тождественно равен 0 при  $x = 0$  (ведь  $K$  содержит множитель  $x$ ), а также и при  $y = 0$ , поэтому он должен иметь вид  $G = xyG_1$ , где  $G_1$  – многочлен степени не выше первой (ведь степень  $G$  не выше третьей). С другой стороны, в точках  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  и  $A_{21}$ , где  $G = 0$  и  $xy \neq 0$ , многочлен  $G_1$  должен

обращаться в 0, а эти точки не лежат на одной прямой. Это возможно, лишь если  $G_1$ , а с ним и  $G$  тождественно равны 0.

Теорема 3 доказана.

### Сложение точек на кубической кривой

Многие интересные геометрические свойства кубических кривых, а также их разнообразные применения в анализе, теории чисел и даже комбинаторике (теории кодирования) связаны с операцией сложения точек. Существование такой естественной операции – характерное свойство именно (неприводимых) кривых третьей степени, а ее геометрическое определение основано на том, что прямая, пересекающая кривую  $\Omega$  в двух точках, обязательно имеет с ней еще и третью точку пересечения. Мы увидим, что теорема 3 выражает замечательное свойство этой операции – *ассоциативность*:  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .

Сумма  $A + B$  двух точек  $A, B$  кривой  $\Omega$  определяется так. На  $\Omega$  выбирается некоторая «начальная» точка  $E$ . По двум точкам  $A, B$  строится третья точка  $D$  пересечения прямой  $AB$  с  $\Omega$ , а затем – третья точка пересечения с  $\Omega$  прямой  $DE$ ; это и есть, по определению, точка  $A + B$ .

Особенно просто складываются точки на кривой  $y = x^3$  (рис.6): если за начальную точку  $E$  взять начало координат  $(0; 0)$ , то суммой точек с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$  будет точка с абсциссой  $x_1 + x_2$ ! В самом деле, три точки  $A(x_1; x_1^3)$ ,  $B(x_2; x_2^3)$ ,  $D(x_3; x_3^3)$  лежат на одной прямой, если выполнено условие

$$\frac{x_1^3 - x_3^3}{x_1 - x_2} = \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 - x_3},$$

Рис.6. Сложение точек на графике  $y = x^3$ . Три точки этого графика лежат на одной прямой, если и только если сумма их абсцисс равна 0

которое после упрощений принимает вид

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

а поскольку  $E$  – центр симметрии графика  $y = x^3$ , точка  $A + B$  (третья точка пересечения прямой  $DE$  с этим графиком) имеет координаты  $(-x_3; -x_3^3)$ , т.е. абсциссу  $-x_3 = x_1 + x_2$ .

Чтобы операция сложения точек была определена для любых двух точек, нужно сделать некоторые уточнения: учесть точки касания прямых с  $\Omega$  как двукратные (а для точек перегиба – трехкратные) точки пересечения, добавить к кривой «бесконечно удаленные» точки,

выбросить «особые» точки, появляющиеся на некоторых кривых.

Для такого сложения точек на кривой  $\Omega$  свойство *коммутативности*:  $A + B = B + A$  очевидно (прямая  $AB$  совпадает с прямой  $BA$ ). А вот ассоциативность доказать не так просто. Это удастся сделать с помощью теоремы 3, проведя 7 прямых (рис.7). По этой теореме точка  $X$  пересечения прямых, соединяющих  $A$  с  $B + C$  и  $A + B$  с  $C$ , лежит на  $\Omega$ , поэтому  $A + (B + C) = (A + B) + C = Y$ .

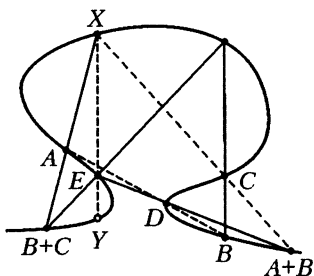


Рис.7. Ассоциативность сложения точек на кубической кривой. Равенство  $A + (B + C) = (A + B) + C$  следует из теоремы о 9 точках

### Построение полиграмм

Назовем *полиграммой* тройку бесконечных последовательностей точек на плоскости —  $A_k$ ,  $B_l$  и  $C_m$ , для которых выполнено такое условие: если  $k + l + m = 0$ , то точки  $A_k$ ,  $B_l$  и  $C_m$  лежат на одной прямой ( $k, l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Этой бесконечной конфигурации была посвящена задача М585 из «Задачника «Кванта». (Интересно, что автор задачи В.В.Батырев прислал нам задачу, когда был еще 10-классником, а теперь он окончил мехмат МГУ и стал его научным сотрудником — специалистом по алгебраической геометрии.) Самую простую полиграмму легко построить на клетчатой бумаге (рис.8), но оказалось, что существует множество разнообразных полиграмм, причем их описание тесно связано со всем содержанием

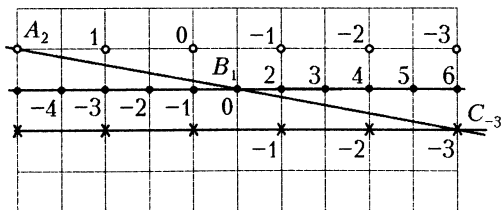


Рис.8. Пример полиграммы. Три бесконечных последовательности точек, занумерованных целыми числами, образуют полиграмму: три точки разных типов  $A_k$ ,  $B_l$  и  $C_m$  лежат на одной прямой, если сумма их номеров  $k + l + m$  равна 0. (В этом примере  $B_{-k-m}$  — середина отрезка  $A_k C_m$  для любых  $k$  и  $m$ .)

нашей статьи, включая даже «сложение точек» на кубической кривой.

Попробуйте экспериментально проверить и затем обосновать следующие утверждения (в этом помогут рисунки 9—11, где изображены некоторые примеры полиграмм; номера расставлены лишь у некоторых первых точек — по ним легко восстанавливаются остальные).

1. Для любых трех прямых  $a, b, c$  по произвольно заданным точкам  $A_0$  (на  $a$ ),  $B_0$  и  $B_1$  (на  $b$ ) строится единственная полиграмма, у которой все точки  $A_k$  лежат на  $a$ ,  $B_l$  на  $b$  и  $C_m$  на  $c$ .

2. Пусть заданы окружность  $\sigma$  (это может быть также эллипс, гипербола или парабола) и три точки:  $A_0$  на  $\sigma$ ,  $B_0$  и  $B_1$  — не лежащие на  $\sigma$ . Тогда существует единственная полиграмма, у которой все точки  $A_k$  и  $C_m$  лежат на  $\sigma$ , а  $B_l$  — на прямой  $B_0B_1$ .

3. Если задана неприводимая кубическая кривая  $\Omega$  и на ней три точки  $A_0, B_0$  и  $B_1$ , что по ним однозначно восстанавливается полиграмма, лежащая на  $\Omega$ , причем ее можно записать в виде тройки арифме-

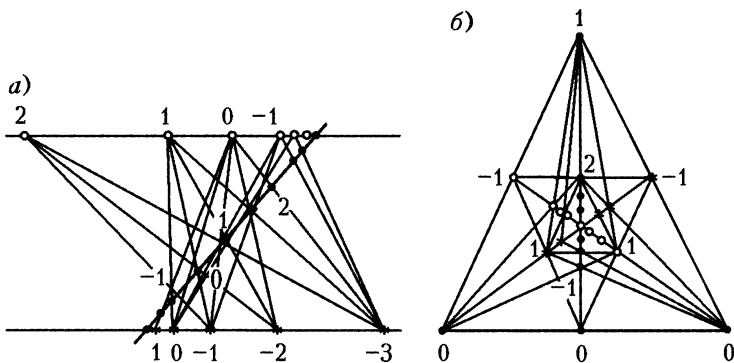


Рис.9. Полиграммы на трех прямых. На каждой из них можно бесконечным числом способов выбрать три тройки точек, служащих вершинами конфигурации Паппа из 9 точек.

а) Множества точек верхней и нижней прямых гомотетичны относительно каждой черной точки  $B_l$ , причем коэффициент гомотетии равен  $k_n = k_0 q_l$ .

б) Эту полиграмму, целиком расположенную в треугольнике, можно получить центральной проекцией рисунка 8. Расстояния от точек каждого типа до центра треугольника пропорциональны числам 1,  $1/2$ ,  $1/3$ , ...

Можно строить и полиграммы на трех прямых, попарно пересекающихся в трех различных точках. Такие полиграммы можно получать центральной проекцией рисунка а)

тических прогрессий  $A_k = A_0 + kD$ ,  $B_l = B_0 + lD$ ,  $C_m = C_0 + mD$  ( $D$  – точка на  $\Omega$ , определяемая условием  $B_0 + D = B_1$ ); правда, если  $D$  – такая точка на (неособой) кривой  $\Omega$ , то  $nD = \underbrace{D + \dots + D}_n = E$ , полиграмма получится не бесконечной, а периодической (такие конфигурации рассмотрены в статье [4] в связи с задачей о том, как много троек из заданного числа точек плоскости могут лежать на прямых).

4. Пусть заданы шесть точек  $A_0, A_{-1}, A_1, B_0, B_1$  и  $B_2$  на плоскости (в общем положении). По ним можно однозначно восстановить полиграмму, все точки которой автоматически окажутся лежащими на некоторой кубической кривой.

Для доказательства общих утверждений о полиграммах полезны следующие соображения. Центральная проекция любой полиграммы – снова полиграмма. Каждые 9 точек полиграммы  $A_k, A_{k+r}, A_{k+s}, B_l, B_{l+r}, B_{l+s}, C_m, C_{m+r}, C_{m+s}$ , где  $k + l + m + r + s = 0$ , образуют конфигурацию, удовлетворяющую условиям теоремы 3; в частности, для полиграмм на трех прямых (рис.9) они образуют 9 точек конфигурации Паппа, а для полиграмм на прямой и окружности (рис.10) – конфигурации Паскаля.

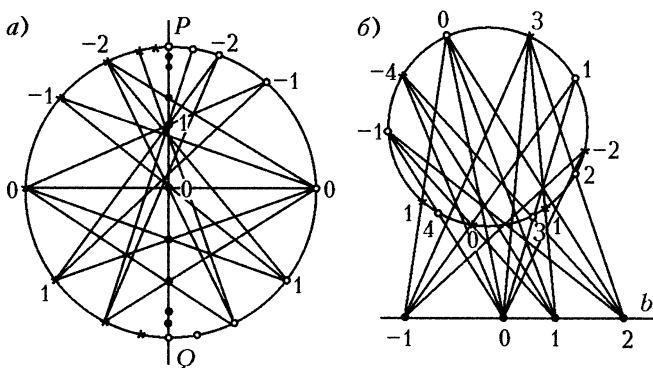


Рис.10. Полиграммы на прямой и окружности. На них можно бесконечным числом способов выделить конфигурацию Паскаля.

а) Отношения расстояний от точек каждого типа до концов диаметра  $PQ$ :  $A_kP/A_kQ$ ,  $C_mP/C_mQ$  и  $B_lQ/B_lP$  образуют геометрические прогрессии с одним и тем же знаменателем  $q$ .

б) Если эту триграмму спроектировать так, чтобы прямая  $b$  с черными точками отобразилась в бесконечно удаленную, а окружность – снова в окружность, то образы белых точек (а также крестиков) с соседними номерами будут отстоять друг от друга на одну и ту же дугу  $\Theta \cdot 360^\circ$  окружности; при иррациональном  $\Theta$  белые точки и крестики будут всюду плотно заполнять окружность, а при рациональном  $\Theta$  полиграмма получится периодической



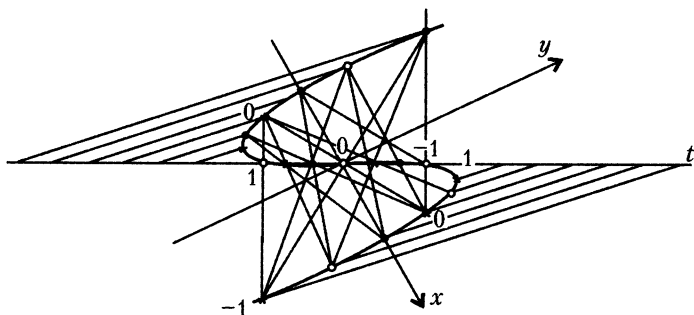


Рис. 11. Полиграмм на графике  $y = x^3 - ax$ . Проекции точек каждого типа на касательную  $Ot$  по направлению оси  $Oy$  составляют ряд равноотстоящих точек – арифметическую прогрессию

Шкала из точек с целочисленными номерами, возникающая при построении полиграмм, наводит на мысль, что существует непрерывный аналог полиграмм; в самом деле, оказывается, точкам любой – приводимой или неприводимой – кубической кривой  $\Omega$  можно сопоставить числовые значения  $t$  – ввести на кривой  $\Omega$  «хорошую параметризацию» так, чтобы для любой прямой, пересекающей  $\Omega$  в трех точках с параметрами  $t_1, t_2, t_3$ , выполнялось условие  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ . (Если кривая  $\Omega$  содержит овал, – окружность на рисунке 10,6, – то значение параметра  $t$  определяется с точностью до прибавления целого кратного «периода»  $T$ , на который меняется значение  $t$  при обходе овала.) Как мы видели (рис.6), на кривой  $y = x^3$  «хороший параметр» – это абсцисса точки  $(x, y)$ . Приведем еще один пример. Пусть  $\Omega$  состоит из трех прямых  $AB, BC, CA$ . Условие, что точки  $M, N, L$ , лежащие соответственно на этих прямых, расположены на одной прямой, имеет вид

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{LC}{LA} = 1$$

(теорема Менелая). Здесь за «хороший параметр»  $t$  на каждой прямой можно принять логарифм соответствующего отношения: если произведение трех чисел равно 1, то сумма их логарифмов равна 0. Точно так же можно в явном виде указать «хорошую параметризацию» для других приводимых и особых кубических кривых, таких, как  $y^2 = x^3$  и «лист Декарта»  $y^2 = x^3 - x^2$  (см. первые страницы книги [6]).

Для неприводимых неособых кубических кривых существование «хорошей параметризации» тесно связано с операцией сложения точек, а ее явное выражение требует знакомства с теорией эллиптических

ких функций – красивейшей областью математического анализа, которой занимались многие крупнейшие математики XIX века.

Сравнительно недавно (1976 г.) американский математик Ф.Грифитс заметил, что наличие «хорошей параметризации» – характеристическое свойство именно кривых третьего порядка: если на плоскости расположены три кусочка кривых с параметрами  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , так что через каждую точку одного из них можно провести прямую, пересекающую два других, и при этом для параметров трех точек пересечения всегда выполнено условие  $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ , то все эти три кусочка содержатся в одной кубической кривой. (Это – непрерывный аналог утверждения о том, что любая полиграмма лежит на кубической кривой.)

### **Литература**

1. *И.М.Яглом*. Геометрические преобразования, ч. II. – М.–Л.: Гостехиздат, 1956.
2. *В.В.Прасолов*. Задачи по планиметрии, ч. II. – М.: Наука, 1986.
3. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1986.
4. Математический цветник. – М.: Мир, 1983 (статья С.Барра «Как сажать деревья», с. 117 – 129).
5. *Э.Артин*. Геометрическая алгебра. – М.: Наука, 1969.
6. *И.Р.Шафаревич*. Основы алгебраической геометрии. – М.: Наука, 1972.

В этой статье обсуждается цепочка теорем, пронизывающая весь школьный курс геометрии. Она начинается с теоремы о средних линиях треугольника и приводит к интересным свойствам тетраэдра и других многогранников.

### Треугольник, четырехугольник, параллелограмм

К любому треугольнику  $KLM$  можно пристроить три равных ему треугольника  $AKM$ ,  $BLK$ ,  $CLM$ , каждый из которых образует вместе с треугольником  $KLM$  параллелограмм (рис.1). При этом  $AK = ML = KB$ , и к вершине  $K$  примыкают три угла, равные трем разным углам треугольника, в сумме составляющие  $180^\circ$ , поэтому  $K$  – середина отрезка  $AB$ ; аналогично,  $L$  – середина отрезка  $BC$ , а  $M$  – середина отрезка  $CA$ .

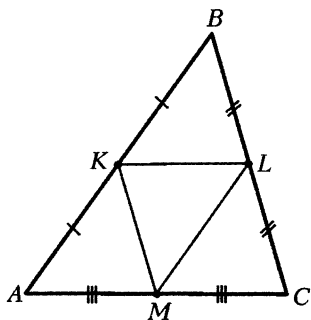


Рис. 1

Ту же самую картину мы можем получить, начав с большого треугольника  $ABC$ .

**Теорема 1.** Если соединить в любом треугольнике середины сторон, мы получим четыре равных треугольника, причем средний составляет с каждым из трех других параллелограмм.

В этой формулировке участвуют сразу все три средние линии треугольника. Обычно в учебнике приводится теорема, где речь идет об одной средней линии.

**Теорема 2.** Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне треугольника и равен ее половине (см. рис.1).

Именно эта теорема и обратная к ней – о том, что прямая, параллельная основанию и проходящая через середину одной боковой стороны треугольника, делит пополам и другую боковую сторону, – чаще всего нужны при решении задач.

---

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером.

Из теоремы о средних линиях треугольника вытекает свойство средней линии трапеции (рис.2), а также теоремы об отрезках, соединяющих середины сторон произвольного четырехугольника.

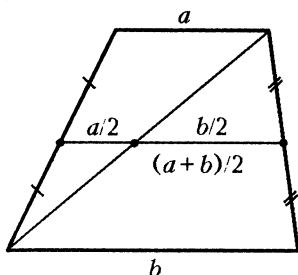


Рис. 2

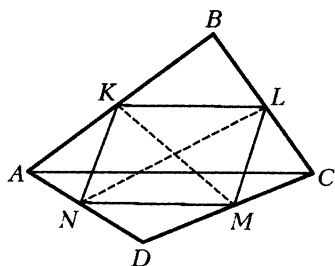


Рис. 3

**Теорема 3.** Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Стороны этого параллелограмма параллельны диагоналям четырехугольника, а их длины равны половинам длин диагоналей.

В самом деле, если  $K$  и  $L$  – середины сторон  $AB$  и  $BC$  (рис.3), то  $KL$  – средняя линия треугольника  $ABC$ , поэтому отрезок  $KL$  параллелен диагонали  $AC$  и равен ее половине; если  $M$  и  $N$  – середины сторон  $CD$  и  $AD$ , то отрезок  $MN$  также параллелен  $AC$  и равен  $AC/2$ . Таким образом, отрезки  $KL$  и  $MN$  параллельны и равны между собой, значит, четырехугольник  $KLMN$  – параллелограмм.

В качестве следствия из теоремы 3 получаем такой факт.

**Теорема 4.** В любом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, делятся точкой пересечения пополам.

Действительно, в этих отрезках можно увидеть диагонали параллелограмма (см. рис.3), а в параллелограмме, как мы

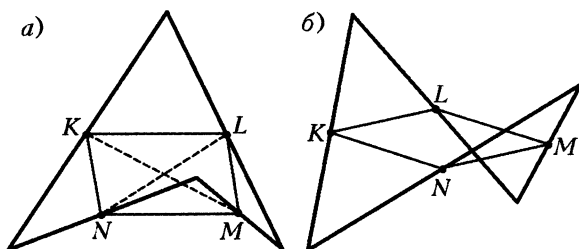


Рис. 4

знаем, диагонали делятся точкой пересечения пополам (эта точка – центр симметрии параллелограмма).

Заметим, что теоремы 3 и 4 и наши рассуждения остаются верными и для невыпуклого четырехугольника, и для самопересекающейся четырехугольной замкнутой ломаной (рис.4; в последнем случае может оказаться, что параллелограмм  $KLMN$  «вырожденный» – точки  $K, L, M, N$  лежат на одной прямой).

Покажем, как из теорем 3 и 4 можно вывести основную теорему о медианах треугольника.

**Теорема 5.** *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1 (считая от вершины, из которой проведена медиана).*

Проведем две медианы  $AL$  и  $CK$  треугольника  $ABC$ . Пусть  $O$  – точка их пересечения. Середины сторон невыпуклого четырех-

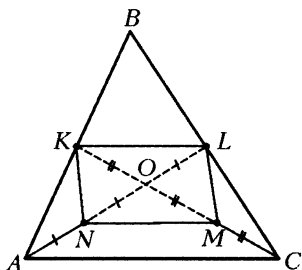


Рис. 5

угольника  $ABCO$  – точки  $K, L, M$  и  $N$  (рис.5) – вершины параллелограмма, причем точкой пересечения его диагоналей  $KM$  и  $LN$  для нашей конфигурации будет точка пересечения медиан  $O$ . Итак,  $AN = NO = OL$  и  $CM = MO = OK$ , т.е. точка  $O$  делит каждую из медиан  $AL$  и  $CK$  в отношении 2:1.

Вместо медианы  $CK$  мы могли бы рассмотреть медиану, проведенную из вершины  $B$ , и убедиться

точно так же, что и она делит медиану  $AL$  в отношении 2:1, т.е. проходит через ту же точку  $O$ .

### Пространственный четырехугольник и тетраэдр. Центры масс

Замечательно, что теоремы 3 и 4 верны и для любой *пространственной* замкнутой ломаной из четырех звеньев  $AB, BC, CD, DA$ , четыре вершины  $A, B, C, D$  которой не лежат в одной плоскости.

Такой пространственный четырехугольник можно получить, вырезав из бумаги четырехугольник  $ABCD$  и согнув его по диагонали под некоторым углом (рис.6,а). При этом ясно, что средние линии  $KL$  и  $MN$  треугольников  $ABC$  и  $ADC$  остаются по-прежнему их средними линиями и будут параллельны отрезку  $AC$  и равны  $AC/2$ . (Здесь мы используем тот факт, что для пространства остается верным основное свойство параллельных прямых: *если две прямые  $KL$  и  $MN$  параллельны третьей*

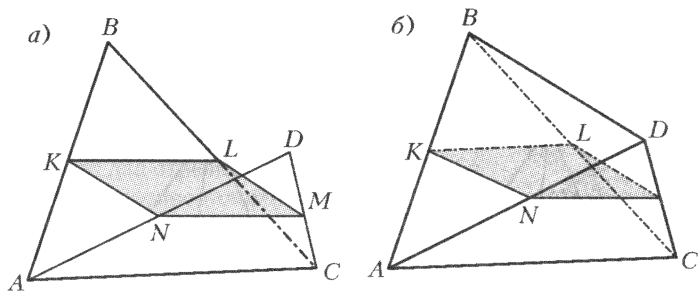


Рис. 6

прямой  $AC$ , то  $KL$  и  $MN$  лежат в одной плоскости и параллельны между собой.)

Таким образом, точки  $K, L, M, N$  – вершины параллелограмма; тем самым отрезки  $KM$  и  $LN$  пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Вместо четырехугольника здесь можно говорить о тетраэдре – треугольной пирамиде  $ABCD$ : середины  $K, L, M, N$  его ребер  $AB, AC, CD$  и  $DA$  всегда лежат в одной плоскости. Разрезав тетраэдр по этой плоскости (рис.6,б), мы получим параллелограмм  $KLMN$ , две стороны которого параллельны ребру  $AC$  и равны  $AC/2$ , а две другие – параллельны ребру  $BD$  и равны  $BD/2$ .

Такой же параллелограмм – «среднее сечение» тетраэдра – можно построить и для других пар противоположных ребер. Каждые два из этих трех параллелограммов имеют общую диагональ. При этом середины диагоналей совпадают. Итак, мы получаем интересное следствие:

**Теорема 6.** *Три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам (рис.7).*

Этот и другие обсуждавшиеся выше факты естественно объясняются на языке механики – с помощью понятия *центра масс*. В теореме 5 говорится об одной из замечательных точек треугольника – точке пересечения медиан; в теореме 6 – о замечательной точке для четверки вершин тетраэдра. Эти точки – центры масс соответственно треугольника и тетраэдра. Вернемся сначала к теореме 5 о медианах.

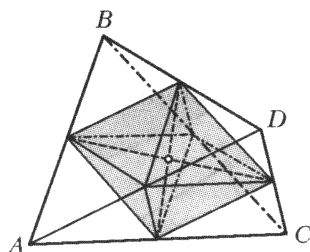


Рис. 7

Поместим в вершинах треугольника три одинаковых груза (рис.8). Массу каждого примем за единицу. Найдём центр масс этой системы грузов.

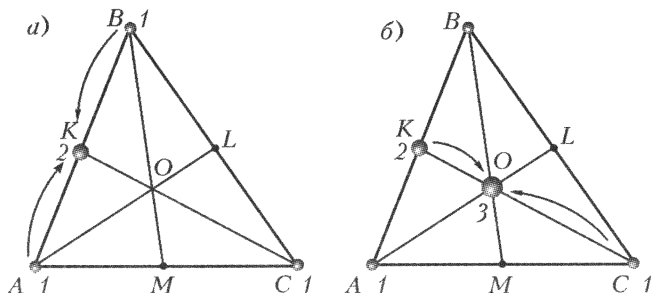


Рис. 8

Рассмотрим сначала два груза, находящихся в вершинах  $A$  и  $B$ : их центр масс расположен в середине отрезка  $AB$ , так что эти грузы можно заменить одним грузом массой 2, помещенным в середину  $K$  отрезка  $AB$  (рис.8,а). Теперь нужно найти центр масс системы из двух грузов: одного массой 1 в точке  $C$  и второго – массой 2 в точке  $K$ . По правилу рычага, центр масс такой системы находится в точке  $O$ , делящей отрезок  $CK$  в отношении 2:1 (ближе к грузу в точке  $K$  с большей массой – рис.8,б).

Разумеется, мы могли сначала объединить грузы в точках  $B$  и  $C$ , а затем – полученный груз массой 2 в середине  $L$  отрезка  $BC$  – с грузом в точке  $A$ . Или сначала объединить грузы  $A$  и  $C$ , а затем присоединить  $B$ . В любом случае мы должны получить тот же результат. Центр масс находится, таким образом, в точке  $O$ , делящей каждую из медиан в отношении 2:1, считая от вершины.

Подобными соображениями можно было объяснить и теорему 4 – тот факт, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, делят друг друга пополам (служат диагоналями параллелограмма): достаточно поместить в вершинах четырехугольника одинаковые грузы и объединить их попарно двумя способами (рис.9).

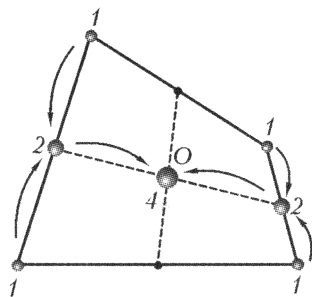


Рис. 9

Конечно, четыре единичных груза, расположенных на плоскости или в пространстве (в вершинах тетраэдра), можно разбить на две пары тремя способами; центр масс

находится посередине между серединами отрезков, соединяющих эти пары точек (рис.10) – объяснение теоремы 6. (Для плоского четырехугольника полученный результат выглядит так: два отрезка, соединяющие середины противоположных сторон, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке  $O$  и делятся ею пополам.)

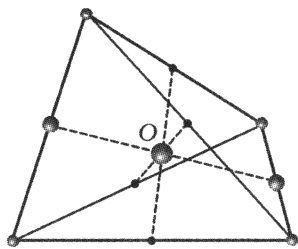


Рис. 10

Через точку  $O$  – центр масс четырех одинаковых грузов – проходят еще четыре отрезка, соединяющих каждый из них с центром масс трех других. Эти четыре отрезка делятся точкой  $O$  в отношении 3:1. Чтобы объяснить этот факт, нужно сначала найти центр масс трех грузов и потом присоединить четвертый.

### Тетраэдр, октаэдр, параллелепипед, куб

В начале статьи мы рассмотрели треугольник, разбитый средними линиями на четыре одинаковых треугольника (см. рис.1). Попробуем проделать то же построение для произвольной треугольной пирамиды (тетраэдра). Распилим тетраэдр на части следующим образом: через середины трех ребер, выходящих из каждой вершины, проведем плоский разрез (рис.11,а). Тогда от тетраэдра будет отрезано четыре одина-

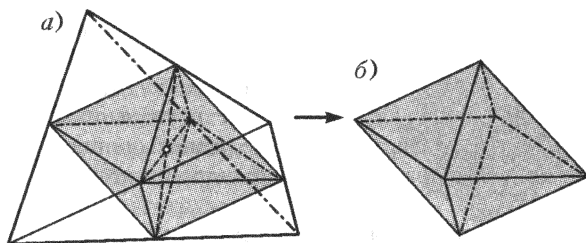


Рис. 11

ковых маленьких тетраэдра. По аналогии с треугольником можно было бы думать, что в серединке останется еще один такой же тетраэдр. Но это не так: у многогранника, который останется от большого тетраэдра после удаления четырех маленьких, будет шесть вершин и восемь граней – он называется октаэдром (рис.11,б). Удобно проверить это, используя кусок сыра в форме тетраэдра. Полученный октаэдр имеет центр симметрии, поскольку середины противоположных ребер тетраэдра пересекаются в общей точке и делятся ею пополам.



С треугольником, разбитым средними линиями на четыре треугольника, связана одна интересная конструкция: этот рисунок мы можем рассмотреть как развертку некоторого тетраэдра.

Представим себе остроугольный треугольник, вырезанный из бумаги. Перегнув его по средним линиям так, чтобы вершины сошлись в одной точке, и склеив сходящиеся в этой точке края бумаги, мы получим тетраэдр, у которого все четыре грани – равные треугольники; его противоположные ребра равны (рис. 12).

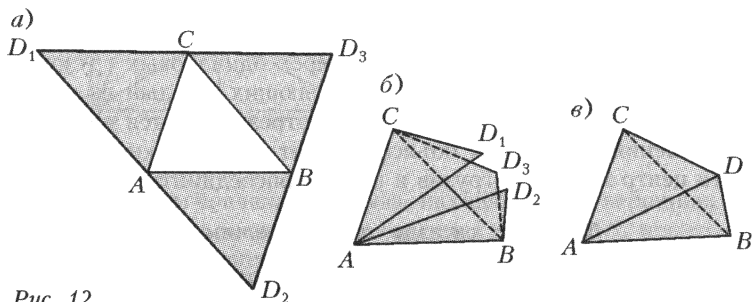


Рис. 12

Такой тетраэдр называется *полуправильным*. Каждое из трех «средних сечений» этого тетраэдра – параллелограммов, стороны которых параллельны противоположным ребрам и равны их половинам, – будет ромбом. Поэтому диагонали этих параллелограммов – три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер – перпендикулярны друг другу. Среди многочисленных свойств полуправильного тетраэдра отметим такое: сумма углов, сходящихся в каждой его вершине, равна  $180^\circ$  (эти углы соответственно равны углам исходного треугольника). В частности, если начать с развертки в форме равностороннего треугольника, мы получим правильный тетраэдр, у которого все ребра равны.

В самом начале статьи мы видели, что каждый треугольник можно рассматривать как треугольник, образованный средними линиями большего треугольника. Прямой аналогии в пространстве для такого построения нет. Но оказывается, что любой тетраэдр можно рассматривать как «сердцевину» параллелепипеда, у которого все шесть ребер тетраэдра служат диагоналями граней. Для этого нужно сделать следующее построение в пространстве. Через каждое ребро тетраэдра проведем плоскость, параллельную противоположному ребру. Плоскости, проведенные через противоположные ребра тетраэдра, будут параллельны друг другу (они параллельны плоскости «среднего сечения» –

параллелограмма с вершинами в серединах четырех других ребер тетраэдра). Так получаются три пары параллельных плоскостей, при пересечении которых образуется нужный параллелепипед (две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым). Вершины тетраэдра служат четырьмя несмежными вершинами построенного параллелепипеда (рис. 13). Наоборот, в любом парал-

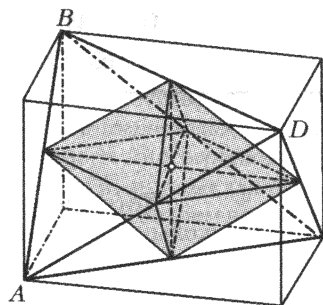


Рис. 13

лелепипеде можно выбрать (двумя способами) четыре несмежные вершины и отрезать от него плоскостями, проходящими через каждые три из них, угловые тетраэдры. После этого останется «сердцевина» – тетраэдр, ребра которого являются диагоналями граней параллелепипеда. Попробуйте доказать, что каждая диагональ параллелепипеда (соединяющая две его противоположные вершины) пересекает грань тетраэдра в точке пересечения ее медиан, причем делится этой точкой в отношении 1:2.

Если исходный тетраэдр полуправильный, то каждая грань построенного параллелепипеда будет параллелограммом с равными диагоналями, т.е. прямоугольником. Верно и обратное: «сердцевиной» прямоугольного параллелепипеда служит полуправильный тетраэдр. Три ромба – средние сечения такого тетраэдра – лежат в трех взаимноперпендикулярных плоскостях. Они служат плоскостями симметрии октаэдра, полученного из такого тетраэдра отрезанием углов.

Для правильного тетраэдра описанный вокруг него параллелепипед будет кубом (рис. 14), а центры граней этого куба – середины ребер тетраэдра – будут вершинами правильного октаэдра, все грани которого – правильные треугольники. (Три плоскости симметрии октаэдра пересекают тетраэдр по квадратам.)

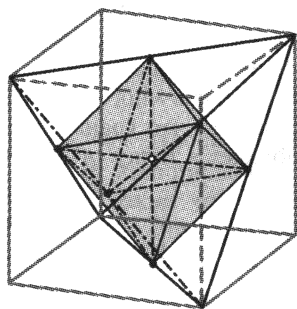


Рис. 14

Таким образом, на рисунке 14 мы видим сразу три из пяти Платоновых тел (правильных многогранников) – куб, тетраэдр и октаэдр. Существуют еще два таких тела: икосаэдр и додекаэдр. Но это уже – сюжет другого рассказа.

## ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ И ПОВОРОТЫ

---

Хотя стереометрию изучают только в старших классах школы, но с кубом, правильными пирамидами и другими простыми многогранниками знаком каждый школьник. В этой статье переплетаются две темы: построение всех правильных многогранников и описание всех поворотов, при которых многогранник совмещается со своим первоначальным положением.

Правильный  $n$ -угольник на плоскости –  $n$ -угольник, у которого равны все стороны и все углы – существует для любого  $n$ : если указать на плоскости точку  $O$  (центр) и  $A_1$  (одну из вершин), то поворотами на углы, кратные  $180^\circ/n$ , вокруг точки  $O$  из  $A_1$  получатся все остальные вершины  $A_2, \dots, A_n$  правильного  $n$ -угольника с центром  $O$ .

Но в пространстве существует лишь конечное число различных правильных многогранников.

**Пять платоновых тел.** Многогранник называется *правильным*, если все его грани – одинаковые правильные многоугольники и двугранные углы при всех ребрах равны.<sup>1</sup> Из определения следует, что правильный многогранник «совершенно симметричен»: если отметить какую-то грань  $\Gamma$  и одну из ее вершин  $A$ , то для любой другой грани  $\Gamma'$  и ее вершины  $A'$  можно совместить многогранник с самим собой движением в пространстве так, что грань  $\Gamma$  совместится с  $\Gamma'$  и при этом вершина  $A$  попадет в точку  $A'$ .<sup>2</sup>

Таблица

	$n$	$k$	$B$	$\Gamma$	$P$
Тетраэдр	3	3	4	4	6
Куб	4	3	8	6	12
Октаэдр	3	4	6	8	12
Додекаэдр	5	3	20	12	30
Икосаэдр	3	5	12	20	30

---

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером.

<sup>1</sup> Мы всюду говорим лишь о выпуклых многогранниках (лежащих по одну сторону от плоскости каждой из своих граней).

<sup>2</sup> В этой фразе слово «грань» можно заменить словом «ребро».

В таблице представлены пять «платоновых тел»; здесь  $n$  – число сторон у грани,  $k$  – число ребер, примыкающих к вершине;  $B, Г, Р$  – общее число вершин, граней и ребер соответственно.

Со времен Платона и Евклида хорошо известно, что *существует ровно пять типов правильных многогранников*. Докажем этот факт. Пусть все грани некоторого многогранника – правильные  $n$ -угольники и  $k$  – число граней, примыкающих к вершине (оно одинаково для всех вершин). Рассмотрим вершину  $A$  нашего многогранника. Пусть  $M_1, M_2, \dots, M_k$  – концы  $k$  выходящих из нее ребер; поскольку двугранные углы при этих ребрах равны,  $AM_1M_2 \dots M_k$  – правильная пирамида: при повороте на угол  $360^\circ/k$ ; вокруг высоты  $АН$  вершина  $M_1$  переходит в  $M_2$ , вершина  $M_2$  – в  $M_3, \dots, M_k$  – в  $M_1$  (рис.1). Сравним равнобедренные треугольники  $AM_1M_2$  и  $HM_1M_2$ . У них основание общее, а боковая сторона  $AM_1$  больше  $HM_1$ , поэтому  $\angle M_1AM_2 < \angle M_1HM_2 = 360^\circ/k$ . Но  $\angle M_1AM_2$  – это угол правильного  $n$ -угольника на плоскости, т.е.  $180^\circ(n-2)/n$ . Итак,  $180^\circ k(n-2)/n < 360^\circ$ ,

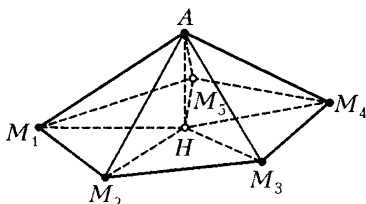


Рис. 1

$k(n-2) < 2n$ ,  $k < \frac{2n}{n-2}$ . Из этого неравенства (и того факта, что  $k \geq 3$ ) нетрудно вывести, что для чисел  $n$  и  $k$  возможны лишь случаи, указанные в таблице.

Все соответствующие многогранники можно построить, взяв за основу куб.

Чтобы получить правильный *тетраэдр*, достаточно взять четыре несмежные вершины куба и отрезать от него пирамидки четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через три из взятых вершин (рис.2,а). Такой тетраэдр можно вписать в куб

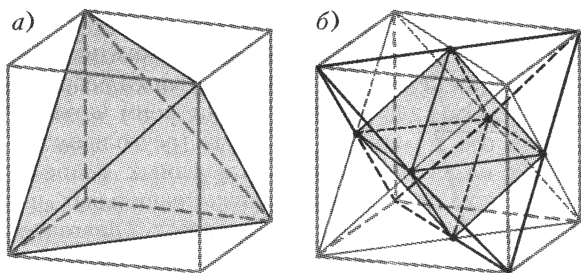


Рис. 2

двумя способами. Пересечение двух таких правильных тетраэдров – это как раз правильный *октаэдр*: многогранник из восьми треугольников с вершинами, расположенными в центрах граней куба (рис.2,6). Остается построить два наиболее сложных правильных многогранника: *додекаэдр* – двенадцатигранник из правильных пятиугольников – и *икосаэдр* – двадцатигранник из

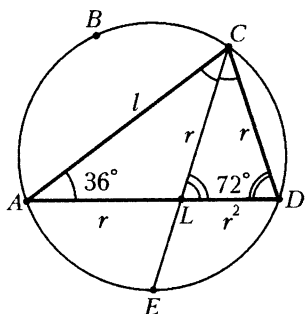


Рис. 3

Сторону  $CD$  нетрудно найти, заметив, что биссектриса  $CL$  делит треугольник на два равнобедренных, один из которых –  $CLD$  –

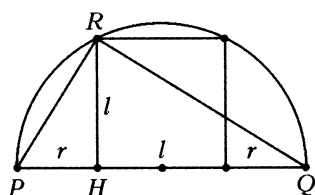


Рис. 4

подобен треугольнику  $ACE$ :  $1 - \tau = \tau^2$ , откуда  $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$  (это число называют «золотым сечением», и греческая буква «тау» часто используется для его обозначения). На рисунке 4 изображен удобный для запоминания способ построения  $\tau$ : если вписать квадрат со стороной 1 в полукруг, то отрезки диаметра, лежащие вне квадрата, будут как раз равны  $\tau$  ( $PH \cdot HQ = RH^2$ , т.е.  $\tau(1 + \tau) = 1$ ).

Вернемся к построению правильных многогранников.

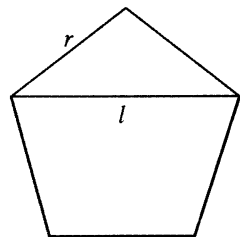


Рис. 5

**Построение додекаэдра.** Возьмем за основу куб с единичным ребром. На каждой его грани построим четырехскатную крышу из двух треугольников и двух трапеций, полученных разрезанием по диагонали двух правильных пятиугольников со стороной  $\tau$  (диагональ такого пятиугольника как раз равна 1), – см. рисунки 5–6. Если нам удастся располо-

жить крыши на всех гранях так, чтобы треугольник и трапеция, примыкающие к каждому ребру куба, составляли вместе плоский пятиугольник, то мы построим правильный додекаэдр (рис.7).

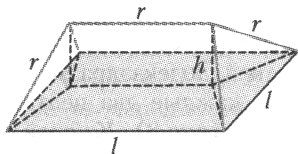


Рис. 6

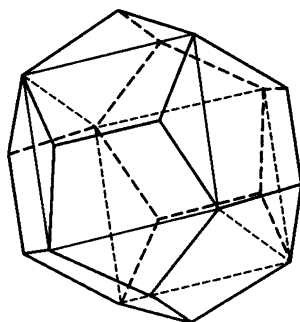


Рис. 7

Подсчитаем высоту  $h$  такой крыши (см. рис.6). Пусть  $x$  — длина проекции наклонного ребра  $\tau$  на грань куба. Пользуясь теоремой Пифагора, получим

$$x^2 = \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad x^2 + h^2 = \tau^2,$$

откуда найдем (ввиду того, что  $\tau^2 = 1 - \tau$ ):  $h = \tau/2$ . С другой стороны, чтобы треугольный скат крыши и трапеция, примыкающая к тому же ребру, лежали в одной плоскости, нужно, чтобы углы наклона треугольника и трапеции к грани в сумме составляли  $90^\circ$ , т. е. чтобы были подобны прямоугольные треугольники с катетами  $h$ ,  $(1-\tau)/2$  и  $1/2$ ,  $h$ ; для этого требуется выполнение равенства  $h^2 = (1-\tau)/4 = \tau^2/4$ , которое приводит нас к тому же значению  $h$ .

Конечно, совпадение двух формул, из которого следует возможность построения правильного додекаэдра, при таком способе построения выглядит как подарок судьбы. Но можно доказать существование додекаэдра, пользуясь только соображениями симметрии.

Ясно, что из трех правильных пятиугольников можно единственным образом составить трехгранный угол, у которого все двугранные углы равны (Этот двугранный угол  $\alpha$  — угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды со стороной основания 1 и боковым ребром  $\tau$ ). Начав с правильного пятиугольника 1, мы можем приклеить к его сторонам пять пятиугольников 2, 3, 4, 5, 6, образующих с ним нужный угол, — каждые два соседних пятиугольника (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) и (6, 2) будут иметь общее ребро и образуют между собой такой же двугранный угол  $\alpha$ . К ним можно поэтому приклеить следующий ряд таких же пятиугольников 7, 8, 9, 10, 11 — пары

соседних пятиугольников тоже будут иметь общее ребро и составлять двугранный угол  $\alpha$ . Поэтому свободные стороны пятиугольников 7–11 образуют правильный пятиугольник, равный предыдущим, и образующий с каждым предыдущим двугранный угол  $\alpha$ .

**Построение икосаэдра.** После того, как построен додекаэдр, существование правильного икосаэдра уже почти очевидно: для

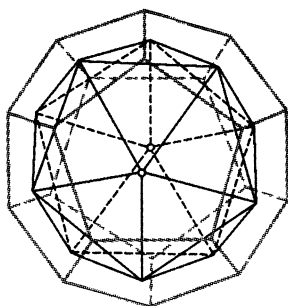


Рис. 8

его построения достаточно отметить центры граней додекаэдра и соединить ребром каждые два центра соседних граней (рис.8). Каждой вершине додекаэдра будет соответствовать грань икосаэдра – правильный треугольник с вершинами в центрах пятиугольников, сходящихся к этой вершине.

Центры граней икосаэдра, в свою очередь, служат вершинами додекаэдра.<sup>3</sup> Если же срезать каждую вершину икосаэдра плоскостью, отсекающей третья часть каждого выходящего из нее ребра, получится многогранник с 32 гранями, 20 шестиугольными и 12 пятиугольными – так шьют современные футбольные мячи.

Сравнительно недавно было обнаружено, что симметричное тело в форме икосаэдра было изобретено и живой природой: такую форму имеют белковые оболочки многих вирусов (в частности, хорошо изученных «бактериофага  $\lambda$ » и вируса «табачной мозаики»).

**Самосовмещения многогранников.** Какие самосовмещения (вращения, переводящие в себя) есть у куба, тетраэдра и октаэдра? Заметим, что некоторая точка – *центр* многогранника – при любом самосовмещении переходит в себя, так что все самосовмещения имеют общую неподвижную точку.<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Такая двойственность правильных многогранников обсуждалась, например, в «Калейдоскопе» «Кванта» №12 за 1988 год. Заметим, что у двойственных многогранников – куба и октаэдра, додекаэдра и икосаэдра – множества самосовмещений одинаковы.

<sup>4</sup> Верен и более общий факт: любое движение, переводящее данный многогранник (не обязательно правильный) в себя, всегда имеет неподвижную точку, более того, все самосовмещения многогранника переводят некоторую точку  $O$  в себя, т.е. имеют общую неподвижную точку  $O$ . Эта точка – центр тяжести системы равных масс, расположенных в вершинах данного многогранника.

Посмотрим, какие вообще в пространстве бывают вращения с неподвижной точкой  $A$ . Покажем, что *такое вращение обязательно является поворотом на некоторый угол вокруг некоторой прямой, проходящей через точку  $A$* . Достаточно у нашего движения  $F$  (с  $F(A) = A$ ) указать неподвижную прямую. Найти ее можно так: рассмотрим три точки  $M_1$ ,  $M_2 = F(M_1)$  и  $M_3 = F(M_2)$ , отличные от неподвижной точки  $A$ , проведем через них плоскость и опустим на нее перпендикуляр  $AH$  (рис.9) – это и будет искомая прямая. (Если  $M_3 = M_1$ , то наша прямая проходит через середину отрезка  $M_1M_2$ , а  $F$  – осевая симметрия: поворот на угол  $180^\circ$ .)

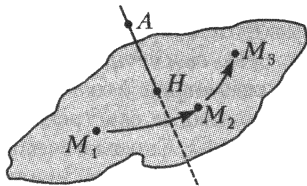


Рис. 9

Итак, самосовмещение многогранника обязательно является поворотом вокруг оси, проходящей через центр многогранника. Эта ось пересекает наш многогранник в вершине или во внутренней точке ребра или грани. Следовательно, наше самосовмещение переводит в себя вершину, ребро или грань, значит, оно переводит в себя вершину, середину ребра или центр грани. Вывод: *движение куба, тетраэдра или октаэдра, совмещающее его с собой, есть вращение вокруг оси одного из трех типов: центр многогранника – вершина, центр многогранника – середина ребра, центр многогранника – центр грани.*

Проверим этот вывод для куба. У куба ось первого типа – это большая диагональ. Пусть  $AM_1$ ,  $AM_2$ ,  $AM_3$  – ребра, выходящие из вершины  $A$  куба,  $AB$  – его диагональ (рис.10,а). Рассмотрим поворот  $R$ , переводящий точки  $A$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  соответственно в  $A$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . При этом повороте куб совмещается сам с собой, причем вершина  $B$  остается на месте, так что ось поворота – диагональ  $AB$ . Повторим этот поворот  $R$  трижды; при

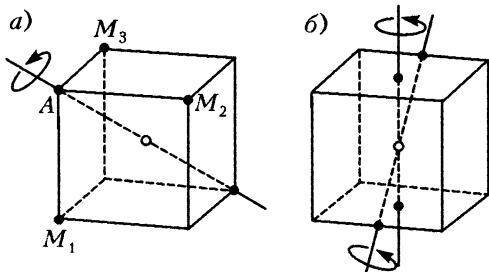


Рис. 10



этом  $M_1$  перейдет в  $M_2$ , затем в  $M_3$  и вновь в  $M_1$  – куб повернется на  $360^\circ$  и совместится с первоначальным положением. Поэтому  $F$  – поворот вокруг оси  $AB$  на угол  $120^\circ$ .

Вообще, если многогранник совмещается с самим собой при повороте вокруг прямой на угол  $360^\circ/m$ , то эту прямую называют *осью симметрии  $m$ -го порядка*. Для куба ось первого типа – ось симметрии 3-го порядка, ось второго типа – ось симметрии 2-го порядка и ось третьего типа – ось симметрии 4-го порядка (рис. 10,б). Сколько всего имеется разных самосовмещений куба? Вокруг каждой оси 3-го порядка есть два разных нетождественных поворота: на угол  $120^\circ$  и на угол  $240^\circ$ ; а осей таких 4 – всего 8 движений. Осей 2-го порядка – 6, вокруг каждой – один поворот – еще 6 движений. Осей 4-го порядка – 3, вокруг каждой три поворота (на углы  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ) – еще 9 движений. Итого  $8 + 6 + 9 = 23$  нетождественных движения. Пар «грань – ее вершина» у куба 24 (6 граней  $\times$  4 вершины) и любую пару можно перевести движением в любую из 23 оставшихся – на это и требуется 23 разных движения.

В случае тетраэдра оси первого и третьего типов совпадают: ось, проведенная через центр тетраэдра и его вершину, проходит и через центр противоположной грани. Эти оси имеют 3-й порядок; всего есть 4 таких оси. Оси второго типа – прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра; таких осей три, и они имеют 2-й порядок. Таким образом, тетраэдр совмещается с собой  $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$  различными вращениями, и это согласуется с тем, что у тетраэдра  $4 \cdot 3 = 12$  пар «грань – ее вершина».

**Движения и симметрии.** Рассматривая самосовмещения многогранников, можно включить в их число не только вращения, но и любые движения, переводящие многогранник в себя. Здесь движение – это любое *преобразование пространства, сохраняющее попарные расстояния между точками*.

В число движений, кроме вращений, нужно включить и зеркальные движения. Среди них – симметрия относительно плоскости (*отражение*), а также композиция отражения относительно плоскости и поворота вокруг перпендикулярной ей прямой (это – общий вид зеркального движения, имеющего неподвижную точку). Конечно, такие движения нельзя реализовать непрерывным перемещением многогранника в пространстве (как нельзя совместить левый ботинок с его зеркальным отражением – правым ботинком).

Все правильные многогранники имеют плоскости симметрии (у тетраэдра их 6, у куба и октаэдра – по 9, у икосаэдра и

додекаэдра – по 15). А общее число зеркальных самосовмещений у них оказывается точно таким же, как и число настоящих (собственных) самосовмещений – поворотов (включая тождественное).

### Задачи

1. Вершины куба занумерованы так, как показано на рисунке 11,а. Расставьте номера вершин на рисунках 11,б–г так, чтобы кубик на каждом из них получался из куба на рисунке 11,а поворотом; укажите ось и угол этого поворота (считая, что центры кубиков совмещаются).

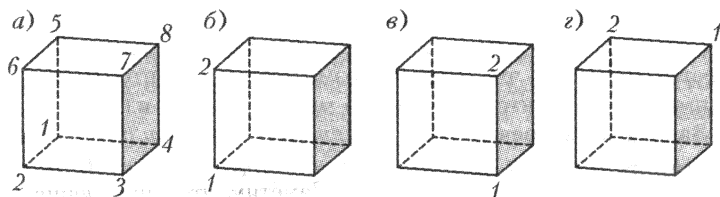


Рис. 11

2. Сколько осей симметрии 2-го, 3-го и 5-го порядка имеют правильный а) октаэдр; б) додекаэдр; в) икосаэдр?

3. Одна или несколько вершин куба отрезаются плоскостью, проходящей через середины выходящих из нее трех ребер. Можно ли таким образом получить многогранник, у которого количество самосовмещений (поворотов, переводящих его в себя) равняется: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12? Нарисуйте примеры.

4. Отметим на каждой грани куба две точки – проекции вершин построенной на этой грани «крыши», т.е. выступающих над этой гранью вершин додекаэдра. Докажите, что отмеченные точки – вершины икосаэдра.

5. Докажите, что на каждом из 12 ребер правильного октаэдра можно взять по точке так, чтобы эти точки были вершинами икосаэдра. В каком отношении они делят ребра октаэдра?

В этой статье мы не будем заниматься строгим определением основных понятий теории вероятностей, а познакомимся с некоторыми задачами, где посчитать вероятности событий помогают соображения симметрии, а также наглядное изображение событий с помощью координат на плоскости.

При этом мы будем иметь дело не только с задачами, где имеется конечное число равновозможных вариантов, но и с такими, где вариантов бесконечно много. Вот две из них.

**Задача о встрече.** Двое приятелей договорились встретиться на площади Маяковского от 12 до 13 часов. Каждый приходит в некоторый случайный момент времени, ждет 15 минут другого и уходит. Какова вероятность, что они встретятся?

**Задача об остроугольном треугольнике.** На окружности случайно выбираются три точки. Какова вероятность, что треугольник с вершинами в этих точках – остроугольный?

Но начнем мы все же с более простых, конечных примеров.

## Бросаем кубик

Самый удобный инструмент для первого знакомства с вероятностями – игральная кость: кубик, грани которого занумерованы числами 1, 2, ..., 6.

Поскольку кубик совершенно симметричен, мы считаем, что все шесть возможных вариантов имеют одинаковую вероятность.

Скажем, вероятность выпадения шестерки равна  $1/6$ , вероятность, что выпадет число не меньшее 3, равна  $4/6 = 2/3$ , вероятность, что выпадет нечетное число очков, равна  $1/2$ . (Соответствующие *события* – множества «благоприятных исходов» – показаны цветом на рисунках 1, а, б, в.)

Если под рукой нет игрового кубика, с таким же успехом можно катить по столу шестигранный ка-

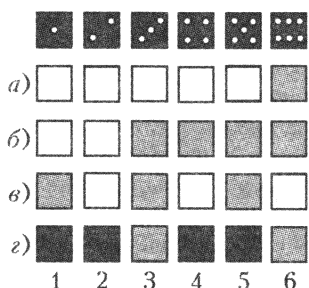


Рис. 1

рандаш, на гранях которого написаны номера 1, 2, ..., 6. Легко представить себе карандаш не с шестью, а с любым числом  $n$  боковых граней.

Итак, пусть у нас есть инструмент, обеспечивающий получение  $n$  равновозможных вариантов. Мы по определению считаем, что вероятность осуществления каждого из этих вариантов равна  $1/n$ , а вероятность каждого события  $A$ , состоящего из  $k$  вариантов, равна  $k/n$ .

При  $n = 6$ , конечно, легко просто пересчитать все варианты, изобразив их на рисунке. Но когда число вариантов  $n$  велико, на помощь приходят некоторые правила вычисления вероятностей.

Будем обозначать вероятность события  $A$  через  $p(A)$ . События у нас – это просто некоторое подмножество множества  $E$  всех возможных вариантов, причем  $p(E) = 1$ . Для бросаний кубика множество  $E$  состоит из шести элементов 1, 2, ..., 6. Самые простые соотношения между вероятностями возникают из соотношений между множествами, точнее, количествами элементов в них.

Вероятность события  $\bar{A}$ , *дополнительного* к  $A$  (в него входят все элементы  $E$ , не входящие в  $A$ ), равна

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A). \quad (1)$$

Например, если  $A$  состоит из чисел от 1 до 6, делящихся на 3, то  $\bar{A}$  – числа, не делящиеся на 3;  $p(A) = 1/3$ ,  $p(\bar{A}) = 1 - 1/3 = 2/3$  (рис. 1,з).

Объединение  $A \cup B$  – событие, состоящее в том, что произошло *хотя бы одно* из двух событий:  $A$  **или**  $B$ . Если события  $A$  и  $B$  *несовместны*, т.е. два множества  $A$  и  $B$  не пересекаются, то

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B). \quad (2)$$

Если же события  $A$  и  $B$  *совместны*, т.е. имеется непустое пересечение  $AB$ , то

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB). \quad (3)$$

(Пересечение двух множеств  $A$  и  $B$  – событие, состоящее в том, что выполняются одновременно  $A$  и  $B$  – мы обозначаем, как принято в теории вероятностей, просто  $AB$ .)

### Повторные испытания

Представим себе, что кубик бросили два раза (или – что сразу бросили два кубика); это – два независимых испытания.

**Задача 1.** Какова вероятность, что при первом бросании выпадет не меньше 5 очков, а при втором – не меньше 4?

Теперь множество  $E$  – это множество всех пар  $(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  – числа от 1 до 6 ( $x$  означает число очков, выпавшее на первом кубике,  $y$  – на втором). Все пары  $(x, y)$  равновероятны, их число

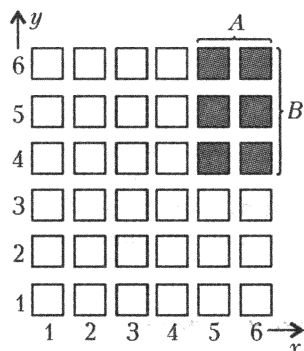


Рис. 2

равно  $6 \cdot 6 = 36$ . Удобно изобразить их в виде квадрата  $6 \times 6$  клеток: клеточка с координатами  $x$  и  $y$  изображает пару  $(x, y)$  (рис.2). Из них надо выбрать те клетки, которые удовлетворяют условию задачи:  $x \leq 5$ ,  $y \leq 4$ . Они заполняют прямоугольник  $2 \times 3$  клетки. Итак, среди  $6 \cdot 6$  пар выбрано  $2 \cdot 3$ , так что искомая вероятность равна

$$\frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Вообще, если событие  $A$  определяется по результату первого испытания, а  $B$  – по второму испытанию (т.е.  $A$  – это некоторый набор столбцов, а  $B$  – некоторый набор строк), то вероятность одновременного выполнения  $A$  и  $B$  равна

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B). \quad (4)$$

В этом случае события  $A$  и  $B$  называют *независимыми*. Правило произведения (4) можно использовать и для большего числа независимых испытаний. Например, вероятность, что при каждом из трех бросаний кубика выпадет пятерка или шестерка, равна  $(1/3)^3 = 1/27$ .

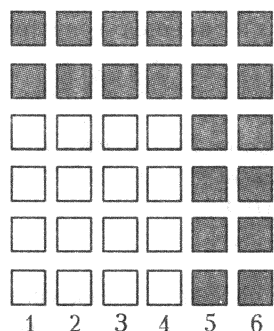


Рис. 3

Рассмотрим теперь два примера, где речь тоже идет о двух испытаниях, т.е.  $E$  – множество пар  $(x, y)$ , но интересующее нас событие зависит от  $x$  и  $y$  более сложным образом, так что условие «независимости» уже не выполняется.

**Задача 2.** Какова вероятность, что хотя бы при одном из двух бросаний кубика выпадет не менее 5 очков?

Соответствующие пары отмечены на рисунке 3, так что искомая вероятность равна  $20/36 = 5/9$ .

Заметим, что можно рассуждать иначе: найти дополнительную вероятность того, что и при первом, и при втором бросании выпадет не более 4 очков. Это уже можно сделать по правилу произведения:  $(2/3) \times (2/3) = 4/9$ , поэтому искомая вероятность равна

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

**Задача 3.** Какова вероятность, что количества очков, выпавших при двух бросаниях, отличаются не более чем на 1?

Нужные пары отмечены на рисунке 4, это 6 клеточек по диагонали  $x = y$  и по 5 на двух соседних с ней параллельных прямых. Искомая вероятность равна  $16/36 = 4/9$ .

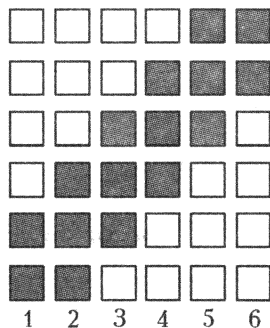


Рис. 4

### Случайные числа и точки: равномерное распределение

Теперь речь пойдет о случайных точках на отрезке, на окружности, в квадрате... Как определяются вероятности в этом случае? Какие «события» можно рассматривать?

Покатим по столу круглый карандаш – цилиндр. Пусть его поверхность белая, но некоторая полоска (или несколько полосок) ширины  $\alpha$  покрашены в черный цвет (рис.5); какова вероятность, что карандаш остановится на черной, а не на белой линии? (Здесь  $\alpha$  – угол, измеряемый, скажем, в градусах.)

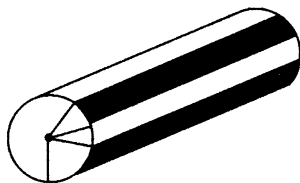


Рис. 5

Представим себе аналогичную задачу про карандаш с большим числом граней  $n$ , из которых  $k$  закрашены в черный цвет. Тогда искомая вероятность будет равна отношению  $k/n$ . Для круглого карандаша множество «элементарных событий»  $E$  – окружность, и вероятность каждого отдельного элемента – вероятность остановки на одной определенной линии – равна 0; но вероятность события «остановка на одной из черных линий» естественно считать равной отношению  $\alpha/360^\circ$ .

Точно так же, говоря о случайной точке на отрезке (или на окружности) длины  $L$ , будем считать, что вероятность ее попа-

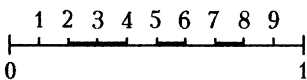


Рис. 6

даний в любой отрезок (или на дугу) длины  $d$  равна  $d/L$ . В соответствии с правилом (1), мы считаем также, что вероятность попадания в один из данных (непересекающихся) отрезков суммарной длины  $d$  равна  $d/L$ . Например, вероятность, что первая после запятой цифра случайного числа на отрезке  $[0; 1]$  – простое число, т.е. одна из цифр 2, 3, 5 и 7 (рис.6), равна  $4/10 = 2/5$ .

Точно так же, говоря о случайной точке в квадрате или в другой фигуре площади  $S$ , мы будем считать, что вероятность ее попадания в каждую область площади  $s$  равна  $s/S$ . Заметим, что и для длины на отрезке и для площади фигуры выполнены правила (1), (2) и (3).

Замечательно, что, выбирая независимо друг от друга два числа  $x$  и  $y$  на отрезке  $[0; 1]$ , можно считать, что  $(x, y)$  – это координаты случайной точки в единичном квадрате: по аналогии с формулой произведения (4), вероятность попадания точки  $(x, y)$  в прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ , параллельными осям  $Ox$  и  $Oy$ , равна произведению  $ab$ , т.е. площади этого прямоугольника.

Например, вероятность того, что случайное число, выбранное на отрезке  $[0; 1]$ , находится на расстоянии не более 0,1 от середины отрезка, равна 0,2 (такие точки покрывают отрезок от 0,4 до 0,6). Если  $x$  и  $y$  – два случайных числа на отрезке  $[0; 1]$ , вероятность того, что *оба* они удалены от середины не более чем на 0,1 равна  $0,2^2 = 0,04$ , а вероятность того, что *хотя бы одно*

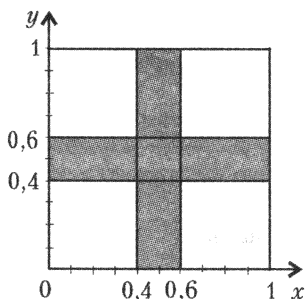


Рис. 7

из них удалено от середины не более чем на 0,1, равна 0,36 (рис.7); эту вероятность можно найти, сложив площади прямоугольников, составляющих «крест», а можно – перейдя к «дополнительным событиям» – по формуле  $(1 - 0,8^2)$ .

Теперь мы можем решить и задачу о встрече, сформулированную в начале статьи. Уточним ее следующим образом. Будем считать, что каждый из приятелей приходит в некоторый случайный момент, выбранный на отрезке  $[0; 45]$  (в течение первых 45 минут условленного часа) и ждет другого 15 минут; тем самым они встретятся, если разность между моментами  $x$  и  $y$  их прихода (по модулю) не превосходит 15.

Изобразим на квадрате  $0 \leq x \leq 45$ ,  $0 \leq y \leq 45$  множество точек  $(x, y)$ , в которых  $|x - y| \leq 15$  — оно ограничено прямыми  $y - x = 15$  и  $y - x = -15$ , параллельными диагонали  $x = y$  (рис.8). Площадь этого множества равна  $45^2 - 30^2$  (два белых треугольника вместе составляют квадрат со стороной 30), а искомая вероятность равна ее отношению к площади всего квадрата  $45 \times 45$ :

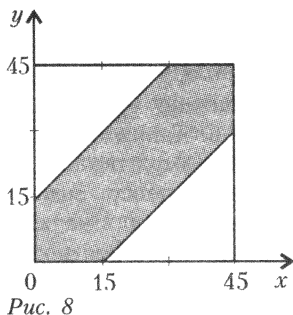


Рис. 8

$$1 - \frac{30^2}{45^2} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

Решим еще одну задачу про случайную точку  $(x, y)$ .

**Задача 4.** Найдите вероятность  $p = p(a)$  того, что сумма  $x + y$ , где  $x, y$  — случайные числа на отрезке  $[0; 1]$ , больше данного числа  $a$ .

Уравнение  $x + y = a$  задает прямую, параллельную диагонали  $x + y = 1$  квадрата. Искомая вероятность — площадь части квадрата, лежащая выше этой прямой. (При  $a > 1$  это треугольник, при  $a < 1$  — пятиугольник, и легче считать площадь дополнения.) Ответ записывается так:

$$p = \begin{cases} (2 - a)^2 / 2 & \text{при } a \geq 1, \\ 1 - a^2 / 2 & \text{при } a \leq 1. \end{cases}$$

### Соображения симметрии. Точки на окружности

Заметим, что при  $a = 1$  в предыдущей задаче получается ответ  $p = 1/2$ . (Соответствующие точки  $(x, y)$  лежат над диагональю.) Его можно угадать сразу, не рисуя картинку на квадрате: если  $x, y$  — числа, случайно выбираемые на отрезке  $[0; 1]$ , то условие  $x + y \leq 1$  можно записать в виде  $x \leq 1 - y$  и прочесть так: « $x$  ближе к 0, чем  $y$  к 1». Ясно, что дополнительное условие получается просто заменой  $x$  на  $y$  и имеет ту же вероятность: ведь роли  $x$  и  $y$ , а также концов отрезка совершенно равноправны.

Вот еще один пример.

**Задача 5.** На отрезке  $[0; 1]$  случайно выбираются три числа. Какова вероятность того, что а) выбранное последнее число наибольшее? б) числа идут в порядке возрастания?

Здесь речь идет уже не о двух, а о трех числах  $x, y, z$ . Тройки  $(x, y, z)$  можно было бы рассматривать как координаты точки в



кубе и подсчитывать объемы нужных множеств. Но в этом нет нужды. Ведь ясно, что все 6 вариантов расположения трех чисел:  $x < y < z$ ,  $y < x < z$ ,  $x < z < y$ ,  $y < z < x$ ,  $z < x < y$ ,  $z < y < x$  совершенно равноправны и имеют одинаковую вероятность по  $1/6$ . Таким образом, ответ на вопрос б)  $1/6$ , а на вопрос а)  $1/3$  (ему отвечают два первых варианта).

Решим теперь задачу об остроугольном треугольнике, сформулированную в начале статьи. Ясно, что при любом повороте окружности вероятности событий и условие «остроугольности» сохраняются; так что мы можем считать, что одна из трех выбираемых вершин  $A, B, C$  – скажем,  $C$  – фиксирована, а две другие уже выбираются случайно. Будем задавать их положения величинами дуг  $CA = \alpha$ ,  $CB = \beta$ , отсчитываемых против часовой стрелки. Будем измерять дуги в радианах, тогда пара  $(\alpha, \beta)$  – это точка в квадрате  $0 < \alpha < 2\pi$ ,  $0 < \beta < 2\pi$ . По теореме о том, что величина вписанного угла измеряется половиной дуги между его сторонами, углы треугольника  $ABC$  равны  $\pi - \beta/2$ ,  $\alpha/2$  и  $(\beta - \alpha)/2$  (мы считаем, что  $\beta > \alpha$  (рис.9); случай  $\alpha > \beta$  совершенно аналогичен –  $\alpha$  и  $\beta$

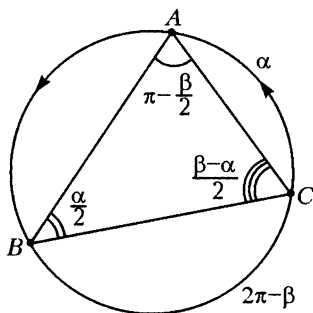


Рис. 9

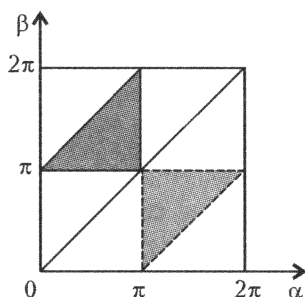


Рис. 10

меняются ролями). Точки  $(\alpha, \beta)$  в треугольнике  $\alpha < \beta < 2\pi$ , для которых все три угла  $A, B, C$  меньше  $\pi/2$ , т.е.  $\beta > \pi$ ,  $\alpha < \pi$  и  $\beta - \alpha < \pi$ , заполняют внутренность меньшего треугольника, образуемого средними линиями большего (рис.10). Ситуация в нижнем треугольнике  $\beta < \alpha < 2\pi$  симметрична относительно диагонали  $\alpha = \beta$  квадрата. Поэтому искомая вероятность равна  $1/4$ .

У этой задачи есть и другое удивительно красивое решение, которое позволяет решить аналогичную задачу для  $n$  точек (см. задачу 9 в конце статьи); мы узнали его от физика В.В.Фока и математика Ю.В.Чеканова.

Будем искать дополнительную вероятность того, что три точки  $A, B, C$  являются вершинами *тупоугольного* треугольника.

Рассмотрим для каждой точки  $M$  окружности диаметрально противоположную ей точку  $M'$  и полукруг, для которого  $M'$  служит серединой дуги. Тройка  $A, B, C$  «тупоугольная», если и только если полукруги, соответствующие точкам  $A, B$  и  $C$ , пересекаются по некоторому сектору (рис. 11). (Для каждого радиуса  $OD$  в выделенном секторе все углы  $DOA, DOB, DOC$  – тупые; такой радиус  $OD$  существует, если  $A, B, C$  лежат на одной полуокружности или, что эквивалентно, образуют «тупоугольную» тройку.)

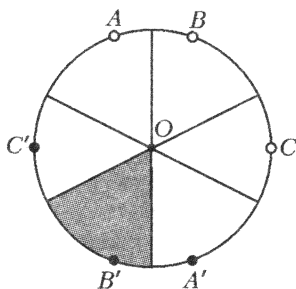


Рис. 11

Выбор случайных точек проведем в два этапа. Сначала отметим произвольно три пары диаметрально противоположных точек и проведем для каждой пары диаметр, относительно которого она симметрична. А затем в каждой паре независимо выберем (с вероятностью  $1/2$ ) одну из точек. Докажем, что из 8 вариантов выбора точек ровно в 6 получится «тупоугольная» тройка  $A, B, C$ . В самом деле, три диаметра делят круг на 6 секторов, причем каждый сектор можно получить как пересечение трех определенных полукругов, соответствующих некоторому выбору точек  $A, B, C$ . Итак, вероятность получить «тупоугольную» тройку равна  $6/8 = 3/4$ , а значит, дополнительная вероятность равна  $1/4$ .

### Задача Бюффона

Мы привыкли, что вероятность – это всегда дробь с небольшими целыми числителем и знаменателем. Но в заключение приведем две задачи, где в ответе встречается число  $\pi$ . Первая почти очевидна.

**Задача 6.** На большой лист клетчатой бумаги со стороной клетки 1 случайно бросают точку. Какова вероятность, что она будет находиться на расстоянии меньше  $1/2$  от центра некоторой клетки?

Достаточно рассмотреть одну клетку. Точки, находящиеся на расстоянии не более  $1/2$  от ее центра, заполняют круг площади  $\pi/4$ . Это и есть ответ: искомая вероятность (отношение площади круга к площади клетки) равна  $\pi/4$ .

**Задача 7** (задача Бюффона о игле). Плоскость разлинована на полосы шириной 1. На нее бросают иглу (отрезок)

длиной 1. Какова вероятность, что игла пересечет одну из линий?

У этой задачи удивительный ответ:  $2/\pi$ . Откуда же берется  $\pi$ , если в условии нет речи ни об окружностях, ни о расстояниях?

Наметим коротко одно из решений. Положение иглы (если не говорить о смещении ее вдоль линий, очевидно, не играющем роли) определяется двумя параметрами: расстоянием  $y$  конца иглы от верхнего края полосы, в которую он попал  $0 < y < 1$ , и углом  $\alpha$  иглы с прямой, перпендикулярной линиям (рис.12,а).

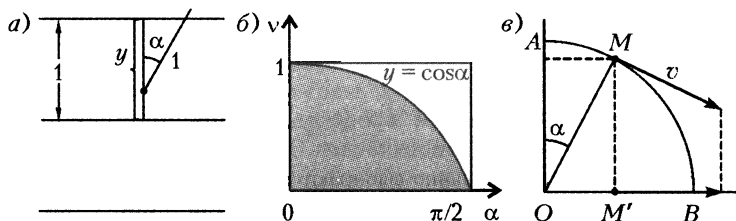


Рис. 12

Можно считать, по соображениям симметрии, что  $\alpha < \pi/2$ . Условие, при котором игла пересекает край полосы:  $y < \cos \alpha$ . Итак, среди точек  $(\alpha, y)$  в прямоугольнике  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $0 < y < 1$  мы должны выбрать лежащие ниже линии  $y = \cos \alpha$  (рис.12,б) и найти отношение площади  $S$  полученной фигуры к площади прямоугольника ( $\pi/2$ ). Для тех, кто знаком с понятием интеграла (его изучают в старших классах), эта задача нетрудная:

$$\int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = 1.$$

Но можно получить ответ, опираясь на аналогию из механики. Представим себе точку, равномерно с единичной скоростью проходящую дугу  $AB$  в  $1/4$  круга радиуса 1 (рис.12,в). Когда точка  $M$  находится в положении  $\alpha$  на дуге ( $0 < \alpha < \pi/2$ ), скорость ее проекции  $M'$  на радиус  $OB$  равна как раз  $\cos \alpha$ . Так что рисунок 12,б – это график скорости точки  $M'$ , а площадь  $S$  под графиком равна пройденному этой проекцией пути, т.е.  $S = OB = 1$ .

В заключение предлагаем несколько задач, похожих на те, с которыми мы познакомились.

## Упражнения

1. Какова вероятность того, что при двух бросаниях кубика выпадут  
а) два числа с суммой не меньше 10?

б) два числа, из которых первое делится на второе?

2. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени и дожидается автобуса одного из двух маршрутов, идущих с интервалами 10 и 15 минут. Найдите вероятность  $p = p(t)$  того, что ему придется ждать не менее  $t$  минут.

3. Отрезок разделен на три равные части. Какова вероятность, что три точки, случайно брошенные на отрезок, попадут в три разных кусочка?

4. На окружности случайно выбраны четыре точки  $A, B, C, D$ . Какова вероятность того, что отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются?

5. а) В окружности проведен диаметр. На нем случайно выбирается точка и через нее проводится хорда, перпендикулярная диаметру. Какова вероятность, что длина хорды больше радиуса окружности?

б) На окружности случайно выбираются две точки. Какова вероятность, что длина соединяющей их хорды больше радиуса?

в) В круге случайно выбрана точка. Какова вероятность, что хорды с серединой в этой точке больше радиуса?

г) Решите аналогичные задачи про хорду длины  $r\sqrt{3}$ , где  $r$  – радиус.

*Замечание.* Задачи а), б), в) – как бы три варианта одной и той же: проведем случайную прямую, пересекающую данную окружность; какова вероятность, что длина высекаемой хорды больше радиуса? Но ответ в них разный (парадокс Бертрана)!

6. На окружности случайно выбраны три точки. Какова вероятность, что у треугольника с вершинами в этих точках: а) есть угол больше  $30^\circ$ ; б) все углы больше  $30^\circ$ ; в) все углы меньше  $120^\circ$ ?

7. На отрезке случайно выбраны две точки. Какова вероятность, что из отрезков, на которые он разбит, можно составить треугольник?

8. Плоскость разбита сеткой прямых на а) квадраты; б) правильные треугольники со стороной 1. Какова вероятность, что монета диаметра 1, случайно брошенная на плоскость, закроет одну из вершин сетки?

9. Найдите вероятность того, что

а) выпуклый  $n$ -угольник с вершинами в случайных точках окружности содержит ее центр.

б) Докажите, что вероятность того, что  $n$  случайно выбранных точек на сфере лежат на одной полусфере (по одну сторону от некоторого большого круга), равна  $(n^2 - n + 2)/2^n$ .

В этой заметке, посвященной решению задачи M1496, мы докажем ряд интересных фактов, касающихся решений в натуральных числах уравнений вида

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = kx_1 \dots x_n. \quad (1)$$

Здесь  $n$  и  $k$  – параметры – тоже натуральные числа. Частный случай уравнения  $k = n = 3$  – уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad (2)$$

– подробно изучался замечательным русским математиком А.А.Марковым [1, 2]; так называемые «формы Маркова», тесно связанные с уравнением (2), используются в теории наилучшего приближения иррациональных чисел рациональными (см., например, [3]).

### Дерево решений

Отметим с самого начала чудесное свойство уравнений Маркова. Если уравнение (1) имеет одно решение, то имеет их очень много, и размножить их можно так. Будем смотреть на одну из переменных – скажем, на  $x_n$  – как на «неизвестное», а все остальные считать параметрами.

Тогда, поскольку уравнение

$$x^2 - kx_1 \dots x_{n-1}x + (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) = 0$$

– квадратное (относительно  $x$ ) и имеет корень  $x = x_n$ , оно должно иметь и второй целочисленный корень  $x'_n = u$ ; по теореме Виета, он равен

$$u = kx_1 \dots x_{n-1} - x_n = (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)/x_n. \quad (3)$$

Заметим, что  $u < x_n$  в том и только в том случае, если

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < x_n^2 \Leftrightarrow 2x_n > kx_1 \dots x_{n-1}. \quad (4)$$

Такую процедуру можно проделать с каждой переменной  $x_j$  в роли  $x_n$ . Но лишь для одной – наибольшей – может случиться, что выполнено (4) и мы получим новое решение

---

Статья написана в соавторстве В.Сендеровым и А.Скопенковым.

$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x'_n)$ , «меньшее» исходного (скажем, по сумме переменных); как правило, решение «растет вверх». Так получается бесконечное ветвящееся «дерево решений»; подробно об этом рассказывается в статье М.Г.Крейна [4].

Ниже, если не оговорено противное, мы считаем, что  $x_i$  переставлены по порядку:  $x_1 \leq \dots \leq x_n$ . При этом будем называть решение  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  *корневым*, если

$$x_n^2 \leq x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \Leftrightarrow 2x_n \leq kx_1 \dots x_{n-1} \quad (5)$$

(из него все ветви, идущие к соседним решениям, растут вверх).

**Лемма 1.** *Если уравнение (1) имеет решение в натуральных числах, то оно имеет и корневое решение.*

В самом деле, от некорневого решения  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно проделать спуск к меньшему  $(x_1, x_2, \dots, x'_n)$ , затем – переставив  $x_i$  по порядку – к еще меньшему, и после конечного числа шагов этот спуск должен остановиться, т.е. прийти к корневому решению.

Заметим, что у некоторых уравнений (1) может быть, в отличие от (2), более одного корневого решения; например, для  $n = 50$ ,  $k = 14$  решения  $(1, \dots, 1, 7)$  и  $(1, \dots, 1, 2, 2)$  – корневые, так что решения образуют не одно дерево, а целый лес. В этом лесу ветви (как разных деревьев, так и одного и того же дерева) не могут срастись: «путь вниз», в отличие от «пути вверх», может существовать лишь один – с помощью наибольшей переменной.

Построенный пример показывает также, что корневое решение не обязано быть минимальным (по сумме переменных). Обратное же утверждение справедливо: всякое минимальное решение, очевидно, является корневым.

### Основные оценки

При исследовании конкретных (с фиксированными  $n$  и  $k$ ) уравнений (1) полезна следующая

**Лемма 2.** *Пусть  $n > 2$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – корневое решение, причем, как всегда,  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Тогда*

$$x_1 \dots x_{n-2} \leq \frac{2(n-1)}{k}.$$

Доказательство получаем, сокращая на  $x_{n-1}^2$  крайние члены цепочки

$$\begin{aligned} kx_1 \dots x_{n-2}x_{n-1}^2 &\leq kx_1 \dots x_n = \\ &= x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 2(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) \leq 2(n-1)x_{n-1}^2 \end{aligned}$$

**Замечание.** Из доказательства следует, что неравенство леммы строгое.

Из леммы 2 следует, что при  $n > 2$  число корневых решений конечно. Докажем это. Достаточно фиксировать значения  $x_1, \dots, x_{n-2}$  и рассмотреть равенство  $x^2 + x_{n-1}^2 + A = Bxx_{n-1}$ . Очевидно,  $B > 2$ . Поскольку рассматриваемое решение корневое, то  $x = x_n$  — наименьший корень этого (рассматриваемого относительно  $x$ ) уравнения. Но  $x_{n-1} \leq x_n$ ; значит,  $2x_{n-1}^2 + A \geq Bx_{n-1}^2$ ,  $A \geq (B - 2)x_{n-1}^2$ . Очевидно, этому неравенству может удовлетворять лишь конечное число натуральных  $x_{n-1}$ . Но для каждого из них  $x_n^2 \leq x_{n-1}^2 + A$  — что и завершает доказательство.

Таким образом, бесконечный лес может возникнуть лишь при  $n = 2$ . Он и возникает, но «вырожденный»: из каждого корня ничего не растет.

**Теорема.** Если уравнение (1) имеет решения и  $n \neq k$ , то  $n \geq 2k - 3$  при  $n \geq 5$  и  $n > 4k - 6$  при  $n = 3$  и  $n = 4$ .

Нетрудно видеть, что оценка является точной: при  $n = 2k - 3$  достаточно положить  $x_1 = \dots = x_{2k-4} = 1$ ,  $x_{2k-3} = 2$  или  $x_1 = \dots = x_{2k-4} = 1$ ,  $x_{2k-3} = k - 2$ . (Ясно, что любое из этих решений может быть получено из другого при помощи формул Виета, т.е. они «соседние».)

(Заметим, что при  $k \geq 3$  равенство  $n = 4k - 6$  также реализуется: достаточно положить  $x_1 = \dots = x_{4k-8} = 1$ ,  $x_{4k-7} = x_{4k-6} = 2$ .)

Доказательство теоремы будет вытекать из следующей леммы, относящейся просто к наборам  $n$  натуральных чисел  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , где  $n \geq 3$ .

**Лемма 3.** Если  $1 < x_n^2 \leq x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$ , то отношение  $R = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1 \dots x_n}$  не превосходит  $(n + 3)/2$  (а при  $n = 3$  и  $n = 4$  — даже  $(n + 6)/4$ ).

**Доказательство.** Пусть  $K$  — множество наборов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих условиям леммы (т.е. таких, что наибольшее число больше 1 и его квадрат не больше суммы квадратов остальных).

Попробуем из любого данного набора получить «меньший» (по сумме координат) так, что новый набор также входит в  $K$  и при этом переходе отношение  $R$  не уменьшается. Для этого мы проделываем одну из следующих операций «спуска»:

( $C_1$ ) уменьшаем наибольшее число на 1, или, если эта операция выводит из  $K$  (это возможно лишь, если в наборе ровно два наибольших числа),

( $C_2$ ) уменьшаем два наибольших числа на 1.

То, что  $R$  не уменьшается, для операции  $C_2$  очевидно. Проверим, что это так для операции  $C_1$ . Для этого положим

$x = x_n$ ,  $a = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + a}{x}$ ; заметим, что при  $0 < x \leq \sqrt{a}$  функция убывает.

Через конечное число шагов мы придем к одному из двух наборов:  $(1, \dots, 1, 2)$  (при  $n \geq 5$ ) либо  $(1, \dots, 1, 2, 2)$  (при  $n = 3$  и  $n = 4$ ). В первом случае  $R = (n+3)/2$ . Во втором случае  $R = (n+6)/4 < (n+3)/2$ . Лемма доказана.

Теперь докажем теорему. Применим лемму 3 к корневому решению некоторого уравнения (1). Согласно лемме 1, такое существует; ясно, что оно отлично от  $x_1 = \dots = x_n = 1$ . Получаем неравенство  $n \geq 2k - 3$  (при  $n \neq k$ ,  $n > 4$ ) или  $n \geq 4k - 6$  (при  $n \neq k$ ,  $n = 3$  или  $n = 4$ ). Теорема доказана.

(Если  $n = 2$ , то уравнение, очевидно, разрешимо лишь при  $k = 2$ . Общий вид решения:  $(m, m)$ .)

### Конкретные примеры

Легко заметить, что при фиксированном  $k$  уравнение (1) всегда имеет решение при  $n = k$  (из одних единиц) и еще — при бесконечном количестве  $n$  (вида  $(1, \dots, 1, x, \dots, x)$ ; для того чтобы подобрать такое решение, возьмем натуральное  $t > 2$ , рассмотрим достаточно большое натуральное  $x$  — такое, что  $tx^2 \leq kx^t$ , и дополним (в случае неравенства) левую часть единицами до равенства с правой).

Вопрос, на который мы в состоянии ответить: при каком наименьшем  $n = n(k) > k$  существуют решения? Ответ на него при  $k \geq 4$  дает теорема, которую мы доказали. Осталось лишь разобраться с  $k < 4$ , для которых  $2k - 3 \leq k$  поэтому оценка теоремы не дает ответа. Здесь будут использованы все наши леммы, оценки, сравнения по модулю, «спуск» — в общем, обычный арсенал средств, применяемых для изучения уравнений в целых числах.

Начнем со случая  $k = 1$  и  $n = 3$ , т.е. с уравнения  $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ . Оказывается, оно тесно связано с уравнением (2), где  $k = n = 3$ . Корневое решение дает здесь тройка  $(3, 3, 3)$ , а при  $k = 3$  — тройка  $(1, 1, 1)$ . Легко показать, что при  $k = 1$  все компоненты любого решения делятся на 3. Этот факт позволяет установить естественное взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения при  $n = 3$ ,  $k = 1$  и при  $n = 3$ ,  $k = 3$ . Таким образом, рассмотрение каждого из этих



случаев сразу сводится к рассмотрению второго. (Обычно считают  $k = 3$ .)

Мы неоднократно сталкивались с решениями вида  $(m, m, \dots, m)$ . Очевидно, при  $k = n$ , и только в этом случае, решением является  $(1, 1, \dots, 1)$ . Вот еще одно «постоянное» решение: равенству  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xyzt$  удовлетворяет набор  $(2, 2, 2, 2)$ . Легко проверить, что никакие наборы вида  $(m, \dots, m)$ , кроме упомянутых выше, решениями уравнений (1) являться не могут.

$$k = 2$$

Докажем, что при  $n = 3$  уравнение не имеет решений в натуральных числах:

$$x_1 < \frac{2 \cdot 2}{2}, \quad x_1 = 1, \quad 1 + x_2^2 + x_3^2 = 2x_2x_3, \quad 1 + (x_2 - x_3)^2 = 0$$

– противоречие.

Заметим, что у уравнения  $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$  при  $k > 3$  также нет решений – поскольку по теореме должно быть  $n \geq 2k - 3 > 3$ .

При  $k = 2$ ,  $n = 4$  решений нет. Докажем это.

Из леммы 2 следует, что  $x_1x_2 < 3$ . Если  $x_2 = x_1 = 1$ , то  $2 + x_3^2 + x_4^2 = 2x_3x_4$ ,  $2 + (x_3 - x_4)^2 = 0$ .

Пусть  $x_2 = 2$ ,  $x_1 = 1$ . Тогда  $5 + x_3^2 + x_4^2 = 4x_3x_4$ . Число  $x_3^2 + x_4^2$  при делении на 4 может давать лишь остатки 0, 1 или 2; значит, левая часть равенства не делится на 4. Следовательно, уравнение не имеет решений.

Можно рассуждать несколько по-другому. Применим метод спуска один раз: доказав, что все числа  $x_1, x_2, x_3, x_4$  четны, мы приходим к уравнению в натуральных числах

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 8xyzt.$$

Но  $n = 4 < 2 \cdot 8 - 3 = 2k - 3$  – в противоречии с теоремой.

(Уравнения в целых числах  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$  и  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$  предлагались на XII Московской математической олимпиаде.)

При  $k = 2$ ,  $n = 5$  также нет решений.

Из леммы 2 и замечания к ней следует, что можно считать  $x_1x_2x_3 < 4$ . Если  $x_3 = x_2 = x_1 = 1$ , то  $3 + x_4^2 + x_5^2 = 2x_4x_5$  – противоречие.

Пусть  $x_3 = 2$ ,  $x_2 = x_1 = 1$ . Тогда

$$2(6 + x_4^2) \geq 6 + x_4^2 + x_5^2 = 4x_4x_5 \geq 4x_4^2, \quad 6 \geq x_4^2.$$

Так как  $x_4 \geq x_3$ , то  $x_4 = 2$ . Но уравнение  $10 + x_5^2 = 8x_5$  не имеет рациональных корней.

(Уравнение  $6 + x_4^2 + x_5^2 = 4x_4x_5$  можно решить и по-другому. Число  $x_4^2 + x_5^2$  делится на 2, но не делится на 4. Следовательно,  $x_4 = 2t_1 + 1$ ,  $x_5 = 2t_2 + 1$ . Но  $(2t + 1)^2 = 4t(t + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{8}$ . Получили: левая часть равенства делится на 8, правая при делении на 8 дает в остатке 4.)

Пусть  $x_3 = 3$ ,  $x_2 = x_1 = 1$ . Рассуждая, как и выше, получаем:  $6 > \frac{11}{2} \geq x_4^2$ . Но  $x_4 \geq 3$  — противоречие.

Тот факт, что при  $k = 2$ ,  $n = 5$  решений нет, можно доказать и следующим образом: показав, что все числа  $x_1, \dots, x_5$  четны, свести уравнение к такому:

$$y_1^2 + \dots + y_5^2 = 16y_1 \dots y_5.$$

Поскольку  $2 \cdot 16 > 5 + 3$ , это уравнение не имеет решений в натуральных числах.

При  $k = 2$ ,  $n = 7$  решение есть: (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2).

### **$k = 3$**

При  $k = 3$ ,  $n = 4$  решений нет. Из теоремы следует, что  $k \leq (4 + 6)/4 = 5/2$ .

При  $k = 3$ ,  $n = 6$  решение существует:

$$(1, 1, 1, 1, 2, 2).$$

*Замечание.* Одесский математик К.Кноп обратил наше внимание на неразрешимость уравнения при  $k = 2$ ,  $n = 6$  и  $k = 3$ ,  $n = 5$ . Она легко доказывается при помощи леммы 2 рассуждениями, аналогичными неоднократно проведенным выше. Для «минимальных» решений  $(x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_1 \leq \dots \leq x_n$ , К.Кноп получил более сильную, чем в лемме 2, оценку:  $x_1 \dots x_{n-2} \leq \frac{n}{k}$ .

Таким образом, доказано следующее

**Предложение.** Обозначим через  $n(k)$  наименьшее число  $n$ ,  $n \geq 2$ ,  $n \neq k$  такое, что уравнение задачи имеет решение в натуральных числах. Справедливы равенства  $n(1) = 3$ ,  $n(2) = 7$ ,  $n(3) = 6$ ,  $n(k) = 2k - 3$  при  $k \geq 4$ .

Большой вклад в изучение уравнения задачи (в литературе его обычно называют обобщенным диофантовым уравнением Маркова) внесли крупные немецкие математики А.Гурвиц и Ф.Г.Фробениус.

Конечно, в изучении «обобщенного уравнения Маркова» еще немало открытых вопросов: при каких  $(n, k)$  решения существу-

ют, как найти все корневые решения и т.п. Кое-что удастся выяснить. Например, в статье [5] для  $n$ , меньших заданной границы, построен алгоритм нахождения всех возможных значений  $n$  и  $k$ , при которых уравнение задачи имеет решения и указаны 15 значений  $n \leq 131020$ , для которых уравнение имеет решения лишь при  $k = n$ . Наименьшее из таких  $n$  – число 12, наибольшее – число 2688.

### **Литература**

1. *Б.Н.Делоне*. Петербургская школа теории чисел. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
2. *Л.Л.Марков*. О бинарных квадратичных формах положительного определите. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1951.
3. *Дж.В.С.Касселс*. Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Изд-во ИЛ, 1961.
4. *М.Г.Крейн*. Диофантово управление А.А.Маркова. – «Квант» №4 за 1985 г.
5. *N.P.Herzberg*. On a problem of Hurwitz. *Pacif. J. Math.* 1974, 50, №2.

Эта заметка посвящена задаче M1513 – доказательству равенства

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

Собственно говоря, таких доказательств существует очень много – они используют различные приемы тригонометрии, алгебры и даже геометрии. Но необходимые выкладки приятнее проделать самостоятельно, чем разбираться в их подробном изложении. Поэтому мы приведем лишь одно из решений (именно оно, с некоторыми нюансами, чаще других встречалось в работах участников прошлогодней Соросовской олимпиады, где предлагалась эта задача); а затем сформулируем в виде задач некоторые факты, открывающие подходы к другим доказательствам этого равенства, его интересные вариации, обобщения и следствия.

Основные тождества, которые мы будем использовать:

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta), \\ 2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta), \\ 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta), \end{aligned} \tag{1}$$

и их частные случаи (при  $\alpha = \beta$ ).

Обозначим, для экономии места,  $\pi/7$  через  $\eta$ ) («эта» – седьмая буква греческого алфавита). Удобно пользоваться тем, что  $\sin 3\eta = \sin 4\eta$ ,  $\sin \eta = \sin 6\eta$ ,  $\cos 2\eta = -\cos 5\eta$ ,  $\cos 6\eta = \cos 8\eta = -\cos \eta$  и т.п. – мы не будем отдельно отмечать эти переходы. А главное свойство этих углов:

$$2 \cos 2\eta + 2 \cos 4\eta + 2 \cos 6\eta = -1, \tag{2}$$

или, что эквивалентно,

$$2 \cos \eta + 2 \cos 3\eta + 2 \cos 5\eta = 1. \tag{2'}$$

Вот геометрическое доказательство равенства (2). Рассмотрим векторы, идущие из точки  $(0; 0)$  – центра правильного

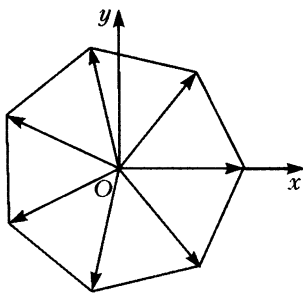


Рис. 1

семиугольника – в его вершины, одна из которых лежит в точке  $(1; 0)$  (рис.1). Поскольку сумма этих семи векторов равна  $\vec{0}$  (ведь при повороте на угол  $2\eta$  вокруг центра она не может измениться!), то равна 0 и сумма их проекций на ось  $Ox$ .

(Другое доказательство (2) или (2') можно получить, умножив обе части на  $\sin \eta$  и применив преобразование (1) произведений в сумму.)

Итак, мы должны доказать равенство

$$\operatorname{tg} 3\eta - 4 \sin \eta = \sqrt{7}. \quad (3)$$

Умножив обе части на  $\cos 3\eta$ , преобразуем левую часть так:

$$L = \sin 3\eta - 2(\sin 4\eta - \sin 2\eta) = 2 \sin 2\eta - \sin 4\eta. \quad (4)$$

Нужно доказать, что квадрат этого (положительного!) числа равен  $7 \cos^2 3\eta$ . И действительно,

$$\begin{aligned} 7 \cos^2 3\eta - L^2 &= 7(1 + \cos 6\eta)/2 - (2 - 2 \cos 4\eta) + \\ &+ (2 \cos 2\eta - 2 \cos 6\eta) - (1 - \cos 6\eta)/2 = \\ &= 2 \cos 2\eta + 2 \cos 4\eta + 2 \cos 6\eta + 1 = 0. \end{aligned}$$

А теперь – несколько задач с комментариями. Прежде всего заметим, что преобразование (4) можно продолжить:

$$\begin{aligned} L &= 2 \sin 2\eta (1 - \cos 2\eta) = 4 \sin^2 \eta \cdot \sin 2\eta = \\ &= 4 \sin \eta \cdot \sin 6\eta \cdot \sin 2\eta = 8 \sin \eta \cdot \sin 2\eta \cdot \sin 3\eta \cdot \cos 3\eta, \end{aligned}$$

поэтому (3) можно записать так:

$$8 \sin \eta \cdot \sin 2\eta \cdot \sin 3\eta = \sqrt{7} \quad (5)$$

(что, конечно, гораздо красивее, чем (3)!). С этим равенством и связаны первые задачи.

1. Докажите равенства

а)  $\cos 2\eta \cdot \cos 4\eta + \cos 2\eta \cdot \cos 6\eta + \cos 4\eta \cdot \cos 6\eta = -1/2$ ,

б)  $\cos 2\eta \cdot \cos 4\eta \cdot \cos 6\eta = -\cos \eta \cdot \cos 2\eta \cdot \cos 4\eta = 1/8$ .

в) Выведите отсюда, что  $\cos 2\eta$ ,  $\cos 4\eta$ ,  $\cos 6\eta$  – корни уравнения

$$P_3(t) \equiv 8t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0 \quad (6)$$

(а  $\cos \eta$ ,  $\cos 3\eta$ ,  $\cos 5\eta$ ) – корни уравнения  $P_3(-t) = 0$ ).

г\*) Существует ли многочлен меньшей степени с целыми коэффициентами, имеющий корнем хотя бы один из шести косинусов пункта в)?

2. Докажите (5), возведя обе части в квадрат.

Дадим геометрическую интерпретацию равенства (5): произведение расстояний от вершины  $(1; 0)$  правильного семиугольника (см. рис.1) до шести остальных вершин равно 7. Объясним это с помощью комплексных чисел, заменив сразу 7 на  $n$ . Пусть  $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  — корни уравнения  $z^n = 1$  они изображаются векторами, идущими к вершинам правильного  $n$ -угольника, причем

$$|1 - \alpha_k| = 2 \sin(\pi k/n), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

3. Докажите тождество

$$(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{n-1}) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}.$$

4. Докажите равенства

а)  $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_{n-1}) = n,$

б)  $\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

и выведите отсюда (5).

5. Найдите произведение длин всех сторон и диагоналей правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность с радиусом 1.

Вернемся к тригонометрии. Левую часть (3) можно преобразовать еще одним способом.

6. а) Докажите равенства

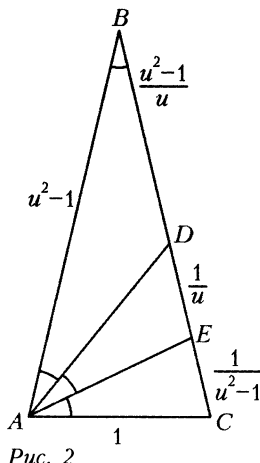
$$2 \sin^2 3\eta = 1 + \cos \eta, \quad 2 \cos^2 3\eta = 1 - \cos \eta,$$

$$\operatorname{tg} 3\eta = (1 + \cos \eta) / \sin \eta.$$

б) Выведите отсюда, что (3) эквивалентно равенству  $P_3(-\cos \eta) = 0$ .

Тем самым, из результата задачи 1 можно получить еще одно доказательство (3). По существу, тот же многочлен  $P_3$  встретится и в следующих геометрических задачах.

7. Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник (рис.2) с основанием  $AC = 1$  и углом  $\angle B = \eta = \pi/7$  при вершине;  $D$  и  $E$  — такие точки на  $BC$ , что  $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC = \eta$ . Поло-



жим  $2 \cos \eta = u$ . Докажите, что

$$а) AB = BC = u^2 - 1, \quad BD = \frac{u^2 - 1}{u}, \quad DE = \frac{1}{u}, \quad EC = \frac{1}{u^2 - 1};$$

$$б) u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0. \quad (7)$$

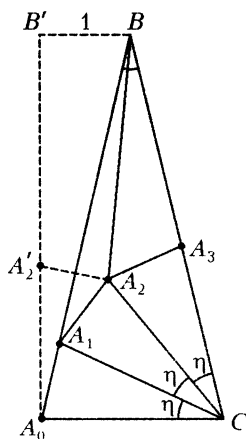


Рис. 3

Это — геометрический способ вывести уравнение задачи 1,в) для  $\cos \eta$ ; а в следующей задаче появится даже  $\sqrt{8}$  (рис.3).

8. Пусть  $A_0BC$  — равнобедренный треугольник с основанием  $A_0C = 2$  и углом  $\angle B = \eta$  при вершине;  $A_0, A_1, A_2, \dots$  — вершины правильного 14-угольника с центром  $C$  (см. рис.3);  $A_2'$  — точка, симметричная  $A_2$  относительно прямой  $A_0B$ .

а) Докажите, что равенство (3) эквивалентно тому, что расстояние  $A_2'B$  равно  $\sqrt{8}$ .

б) Докажите равенство  $A_2B = \sqrt{8}$ , используя равенство (7) или (2).

9. а) Докажите, что площадь треугольника с углами  $\eta, 2\eta, 4\eta$ , вписанного в круг с радиусом 2, равна  $\sqrt{7}$ .

б) Выведите отсюда равенство

$$2(\sin 2\eta + \sin 4\eta - \sin 6\eta) = \sqrt{7}.$$

в) Выведите (5) и (3) из равенства предыдущего пункта. Кстати, треугольник, о котором говорится в задаче 9,а), — единственный из треугольников с углами, кратными  $\eta$ , площадь которого выражается в квадратных радикалах через радиус описанного круга! А тот факт, что и стороны таких треугольников — расстояния между вершинами правильного 7-угольника — не выражаются в квадратных радикалах через радиус, следует из одной общей алгебраической теоремы (о том, что неприводимый многочлен с соответствующими корнями должен иметь степень  $2^k$ ) и результата следующей задачи. Эта последняя, самая трудная задача про угол  $\eta = \pi/7$  и  $\sqrt{7}$  отвечает на вопрос: почему мы оперировали с многочленом, корнями которого были косинусы, а не синусы углов, кратных  $\eta$ .

10. а) Докажите, что  $v = 2 \sin \eta$  — корень многочлена  $v^3 + \sqrt{7}v^2 - \sqrt{7}$ .

б) Найдите многочлен 6-й степени с целыми коэффициентами, один из корней которого равен  $\sin \eta$ .

в) Найдите все корни многочленов пунктов а) и б).

г\*) Существует ли многочлен меньшей степени с целыми коэффициентами, имеющий корнем одно из этих чисел?

д) Выведите из а) или б) равенство (3) или (5).

Пожалуй, этих задач достаточно, чтобы убедиться, что правильный 7-угольник (и 14-угольник), углы  $k\pi/7$  и их связь с  $\sqrt{7}$  – сюжет не менее увлекательный, чем правильный 9-угольник и 18-угольник, о котором рассказывалось в «Кванте» № 5 за 1995 г. (с. 40). Конечно, можно двигаться и дальше – вот еще задача из одной старой книги (*Гальперин Г.А., Толпыго А.К.* Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986. – Приложение 2, задача 25).

11. Докажите равенство

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}.$$



Что такое вероятность? Дать точное определение, которое годилось бы во всех многочисленных применениях, непросто.

Спросите студента-математика, и он отчеканит:

– Вероятностным пространством называется  $\sigma$ -алгебра множеств, на которой задана  $\sigma$ -аддитивная неотрицательная функция (мера), значение которой на всем пространстве равно 1. Вероятность события (множества) – его мера.

– А что такое случайная величина?

– Это измеримая функция.

– А что такое среднее значение случайной величины?

– Это ее интеграл Лебега.

И студент прав. Именно такие определения даны в книге А.Н.Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», вышедшей в свет в 1933 году. Но для первого знакомства этот подход явно не годится: не знает большинство наших читателей, что такое интеграл Лебега!

А как ответит на этот вопрос нематематик? Скорее всего, он скажет, что вероятность события – это его частота. Точнее, если вообразить, что в похожих, многократно воспроизводимых условиях событие иногда происходит, а иногда нет, то вероятность – это доля случаев, в которых оно происходит.

Это объяснение понятнее, но его трудно превратить в точное математическое определение. (Например, если мы 100 раз подбрасываем монету, то естественно ожидать, что примерно в 50 случаях выпадет герб. Но герб не обязательно выпадет именно в 50 случаях. Может быть и 51, и 45, и даже 100 гербов. Вот только вероятность последнего чудовищно мала – скоро мы научимся считать такие вероятности и узнаем, что она равна  $1/2^{100} < 1/10^{30}$ .)

На самом деле, познакомиться с основными приемами подсчета вероятности может даже шестиклассник. Мы начнем с так называемого *классического (комбинаторного)* определения вероятности и лишь в конце статьи придем, через неравенство

Чебышёва, к закону больших чисел, отчасти объясняющему связь между вероятностью события и частотой его появления.

Большая часть текста статьи – задачи, одни из которых решены в тексте, а другие оставлены в качестве упражнений (все они занумерованы по порядку, к некоторым даны указания).

### Комбинаторное определение

Пусть у нас имеется конечное множество  $E$ , состоящее из  $N$  элементов. Элементы множества  $E$  называются *элементарными событиями* (возможными исходами испытаний). *Событием* называется любое подмножество  $A$  множества  $E$ . Вероятность  $P(A)$  события  $A$  задается формулой

$$P(A) = \frac{|A|}{N},$$

где  $|A|$  – число элементов множеств  $A$ .

Это значит, что вероятность каждого элементарного события (отдельного элемента множества  $E$ ) равна  $1/N$ , а вероятность любого события  $A$  складывается из них как из атомов.

Такое определение вероятности годится, например, для задач о бросаниях монеты или игрального кубика и вообще для любой ситуации, где есть несколько равноправных (обычно – из соображений симметрии) возможных исходов.

**1. Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность, что**

*а) в первый раз выпало меньше 4 очков, а во второй – больше 4;*

*б) в первый раз выпало меньше очков, чем во второй;*

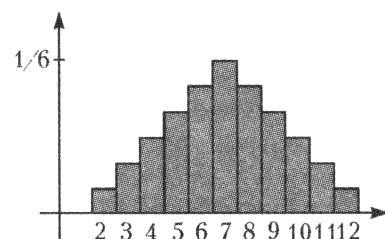
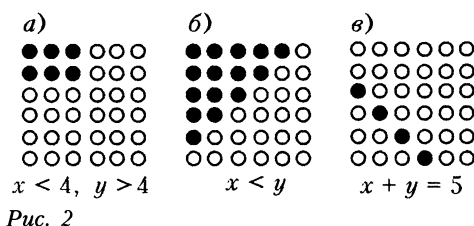
*в) в сумме за два броска выпало  $k$  очков, где  $k = 1, 2, \dots, 12$*

**Решение.** Бросить кубик два раза – все равно что независимо друг от друга бросить два кубика. Поэтому всего здесь  $6 \cdot 6 = 36$  возможных исходов. Это – пары  $(x, y)$ , где  $x$  – число очков, выпавших на первом кубике, а  $y$  – на втором ( $1 \leq x \leq 6$  и  $1 \leq y \leq 6$ ). Их удобно изображать 36 точками, расположенными в виде квадрата  $6 \times 6$  (рис.1).

Осталось отметить точки  $(x, y)$ , удовлетворяющие соответствующему условию, посчитать их количество и разделить на 36 (рис.2).

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

Рис. 1



Получаем ответы: а)  $3 \cdot 2/36 = 1/6$ ; б)  $15/36 = 5/12$ . А ответ в пункте в) изображен в виде *гистограммы*, где высоты столбиков соответствуют вероятностям отдельных событий (рис.3).

Теперь разберем три задачи посложнее.

### Пары, тройки, четверки...

**2. Федя знает ответы на 10 вопросов из 30 возможных. В билет включаются два случайно выбранных вопроса из этих 30. Каковы шансы Феде благополучно ответить на оба вопроса?**

**Решение.** Выясним, сколько всего разных билетов может составить экзаменатор. Их столько, сколько пар можно составить из 30 элементов, т.е.  $30 \cdot 29 = 870$ .

Как мы нашли это число? Первый вопрос – это любой из 30 возможных. Если он уже выбран, то вторым вопросом может быть любой из 29 оставшихся.

Точно так же посчитаем количество билетов, «благоприятных» для Феде:  $10 \cdot 9 = 90$ .

Значит, вероятность сдать экзамен равна  $90/870 = 3/29 = 0,103$ .

Мы могли рассуждать и чуть иначе: не различать билеты, отличающиеся только порядком вопросов. Тогда разных билетов будет вдвое меньше, т.е.  $30 \cdot 29/2 = 435$ . Благоприятных для

Феди станет тоже в два раза меньше:  $10 \cdot 9/2 = 45$ . Ответ, конечно, получится тот же самый.

Число неупорядоченных пар из  $n$  элементов обозначается  $C_n^2$ . Это число встречается во многих ситуациях и вычисляется, как мы уже поняли, по формуле

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**3.** Придя на экзамен, Федя узнал, что в билете не 2 вопроса, а 3. Каковы шансы Феди благополучно ответить на все вопросы?

**Решение.** На этот раз можно составить  $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$  разных билетов. В самом деле, первый вопрос можно выбрать 30 способами. Как бы он ни был выбран, вторым может оказаться любой из 29 остальных, а после выбора первых двух вопросов третьим может оказаться любой из 28 остальных.

Точно так же, благоприятных для Феди билетов  $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ , так что вероятность сдать экзамен равна теперь лишь  $720/24360 = 6/203 < 0,03$ .

Конечно, и в этой задаче можно было не обращать внимания на порядок вопросов в билете, т.е. считать количество трехэлементных подмножеств  $\{P, Q, R\}$  множества всех вопросов. Это число в 6 раз меньше, чем  $30 \cdot 29 \cdot 28$ , поскольку три элемента  $P, Q$  и  $R$  можно переставить 6 способами:  $PQR, PRQ, QPR, QRP, RPQ$  и  $RQP$ .

Итак, Федя мог получить любой из  $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 4060$  разных по содержанию билетов. Благоприятных из них только  $10 \cdot 9 \cdot 8/6 = 120$ . Разделив 120 на 4060, мы получим ту же вероятность.

Число неупорядоченных троек из  $n$  элементов обозначается  $C_n^3$ . Оно равно

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

**4.** Конечно, Феде не повезло, и экзамен он не сдал. А когда Федя пришел в следующий раз, экзаменатор изменил правила: он задает четыре вопроса (случайно выбирая их из 30 возможных). Если Федя ответит на все 4 вопроса, то получит пятерку, если на 3 вопроса – то четверку, если на 2 – тройку, а в противном случае – двойку.

С какой вероятностью Федя получит оценку а) 5; б) 4; в) 3; г) 2?

**Решение.** а) Как мы уже видели, всего можно составить  $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$  разных билетов. Из них  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$  билетов состо-

ят только из известных Феде вопросов, так что вероятность сдать экзамен на «5» равна

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27} = \frac{2}{261} \approx 0,0076.$$

В решении пункта а) мы считали разными билеты, отличающиеся лишь порядком вопросов. В следующих пунктах мы не будем их различать, т.е. будем рассматривать не упорядоченные наборы, а подмножества, состоящие из 4 вопросов. Их количество в 24 раза меньше, чем  $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$ , поскольку 4 элемента можно переставить 24 способами:

*PQRS, PQSR, PRQS, PRSQ, PSQR, PSRQ, QPRS, QPSR, QRPS, QRSP, QSPR, QSRP, RPQS, RPSQ, RQPS, RQSP, RSPQ, RSQP, SPQR, SPRQ, SQPR, SQRP, SRPQ, SRQP.*

Итак, количество 4-элементных подмножеств 30-элементного множества равно

$$C_{30}^4 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{24} = 27405.$$

б) Федя получит «4», если ему достанется билет, в котором 1 незнакомый вопрос (любой из 20) и 3 знакомых вопроса. Эти 3 вопроса из 10 можно выбрать  $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$  способами. Поэтому вероятность получить «4» равна

$$\frac{20 \cdot 120}{27405} \approx 0,0876.$$

в) Для получения тройки нужен билет, в котором 2 знакомых и 2 незнакомых вопроса. Эта вероятность равна

$$\frac{C_{10}^2 C_{20}^2}{C_{30}^4} = \frac{(10 \cdot 9/2) \cdot (20 \cdot 19/2)}{27405} \approx 0,312.$$

г) Двойку можно получить двояко: ответив на один вопрос билета или не ответив ни на один. Соответствующие вероятности равны

$$\frac{10 \cdot C_{20}^3}{25405} = \frac{10 \cdot (20 \cdot 19 \cdot 18/6)}{27405} \approx 0,416$$

и

$$\frac{C_{20}^4}{27405} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17/24}{27405} \approx 0,177.$$

Значит, вероятность получить двойку примерно равна

$$0,416 + 0,177 = 0,593.$$

Ответ можно записать в виде таблички:

Отметка	2	3	4	5
Вероятность	0,593	0,312	0,0876	0,0076

Наглядно это распределение можно изобразить гистограммой (рис.4).

Заметим, что сумма

$$0,0076 + 0,0876 + 0,312 + 0,593 = 1,002 = 1.$$

На самом деле, конечно, сумма этих вероятностей в точности равна 1, ибо какую-то одну из оценок 2, 3, 4 или 5 Федя получит.

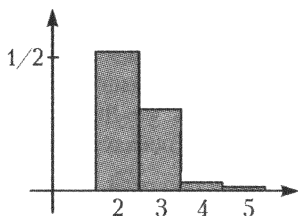


Рис. 4

Вообще, если все пространство  $E$  элементарных событий разбито на несколько (непересекающихся) множеств  $A_1, A_2, \dots, A_r$ , то общее число их элементов равно  $N = |E|$ :

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_r| = |E|$$

и, следовательно, сумма вероятностей событий  $A_1, A_2, \dots, A_r$  равна 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_r) = \frac{|A_1|}{N} + \frac{|A_2|}{N} + \dots + \frac{|A_r|}{N} = \frac{N}{N} = 1. \quad (1)$$

Про такие события  $A_1, A_2, \dots, A_r$  говорят, что они образуют *полную систему событий*.

Здесь очень важно, что никакие два из этих событий не пересекаются. Вообще, если два множества  $A$  и  $B$  (содержащиеся в  $E$ ) не пересекаются, то говорят, что события  $A$  и  $B$  *несовместны*. При этом вероятность того, что происходит хотя бы одно из них – вероятность попасть в  $A$  или в  $B$ , – равна сумме вероятностей событий  $A$  и  $B$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (2)$$

Мы пользовались этим выше в решении пункта г) задачи 4.

### Упражнения

5. Предположим, что Федя знал ответы не на 10, а на 20 вопросов из 30. Каковы тогда были бы вероятности получить оценки 2, 3, 4, 5? Нарисуйте соответствующую гистограмму.

6. 20 человек написали письма друг другу. Сколько всего писем было послано? (Каждый написал письма всем остальным, по одному письму каждому.)

7. 15 гроссмейстеров провели турнир, в котором каждые двое сыграли между собой одну партию. Сколько партий было сыграно?

8. Среди двузначных чисел случайным образом выбираем одно число. С какой вероятностью а) его цифра десятков больше цифры единиц; б) обе цифры равны; в) это число делится на 9?

9. Из 25 учеников класса, в котором учатся Денис, Данила и Димитрий, случайным образом выбрали 10 учеников, которые должны прийти на экзамен к 9 утра, и 10 человек, которые должны прийти к 12 часам. Остальные 5 учеников должны прийти к 14 часам. Какова вероятность, что Денис, Данила и Димитрий а) втроем попадут в первую группу; б) попадут в одну и ту же группу; в) попадут в три разные группы?

### Правило произведения.

### Перестановки и сочетания

Решая задачи про Федю, мы подсчитывали количества разных комбинаций: перестановок, подмножеств конечного множества и тому подобное. Как мы это делали? Основным прием, которым мы пользовались, – правило произведения. Каждый понимает, что если в лесу 100 елок, у каждой елки 20 веток, на каждой ветке 40 лапок, а на каждой лапке 70 иголок, то всего в лесу  $100 \cdot 40 \cdot 70$  иголок.

Вообще, если объект  $x$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора объект  $y$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор пары  $(x, y)$  можно осуществить  $mn$  способами.

Особенно простой вид правило произведения приобретает, если выбор второго элемента  $y$  пары  $(x, y)$  совсем не зависит от

$(x_1, y_1)$   $(x_1, y_2)$  ...  $(x_1, y_n)$   $x$ . Тогда все  $mn$  пар удобно записать в таблицу (рис.5).

$(x_2, y_1)$   $(x_2, y_2)$  ...  $(x_2, y_n)$

.....

$(x_m, y_1)$   $(x_m, y_2)$  ...  $(x_m, y_n)$

Рис. 5

10. В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюда. Сколькими способами можно купить чашку и блюдо?

**Решение.** Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюд. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15 ( $15 = 3 \cdot 5$ ).

11. В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюда и ложки?

**Решение.** Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными

способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно  $60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$ .

**12.** Выбирают случайным образом шестизначное число. С какой вероятностью вторая его цифра равна 3, а четвертая четна?

**Решение.** Всего шестизначных чисел 900000. Из них удовлетворяют условию  $9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10$  чисел, так что вероятность равна

$$\frac{9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{10} = 0,05.$$

Заметьте, что ответ равен произведению  $\frac{1}{10}$  (это вероятность того, что вторая цифра равна 3) и  $\frac{5}{10}$  (это вероятность того, что четвертая цифра четна). С этим мы уже встречались в задаче 1, а), где вероятность оказалась равной произведению  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{3}$ .

Объясним, почему так получается. Представим себе, что мы случайным образом выбираем одну из  $N = mn$  клеток таблицы  $m \times n$  (см. рис.5), причем событие  $A$  состоит в том, что клетка попадает в одну из заданных  $k$  строк, а  $B$  — что она попадает в один из заданных  $l$  столбцов. Тогда пересечение  $A \cap B$  состоит из  $kl$  клеток и поэтому

$$P(A \cap B) = \frac{kl}{N} = \frac{k}{m} \cdot \frac{l}{n} = P(A)P(B).$$

Вообще, два события  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (3)$$

**13.** В ряд расположены  $n$  фонарей. Сколькими способами можно осветить улицу, считая и тот «способ освещения», когда ни один фонарь не горит? (Говоря математическим языком, надо подсчитать количество подмножеств множества из  $n$  элементов.)

**Решение.** Первый фонарь может находиться в двух состояниях: гореть или не гореть. Независимо от него второй фонарь может гореть или не гореть. Значит, первые два фонаря могут находиться в  $2 \cdot 2 = 4$  состояниях. Добавляя третий фонарь, мы удвоим число возможных состояний. Точно так же, добавление каждого следующего фонаря будет удваивать число состояний. Таким образом, имеется  $2^n$  способов освещения  $n$  фонарями.

Заодно мы посчитали количество последовательностей длины  $n$  из нулей и единиц. Оно равно  $2^n$ . В самом деле, зажженный фонарь можно обозначать единицей, а негорящий — ну-



лем. (Тогда последовательность из  $n$  нулей означает, что ни один фонарь не горит, т.е. соответствует пустому множеству. А последовательность из  $n$  единиц означает, что все фонари горят.)

Используя правило произведения, легко посчитать общее количество *перестановок*, которые можно составить из  $n$  элементов, т.е. количество способов, которыми можно все эти элементы расположить в ряд. Мы уже видели, что оно равно 6 для  $n = 3$  и 24 для  $n = 4$ . В общем случае оно равно

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

В самом деле, если нам нужно расположить в строку  $n$  элементов, то первый можно выбрать  $n$  способами, после чего второй можно выбрать  $(n - 1)$  способами, после каждого выбора первого и второго третий –  $(n - 2)$  способами, ..., предпоследний элемент выбирается из двух оставшихся к этому моменту, а последний определен однозначно.

Займемся теперь не менее важными для комбинаторики и теории вероятностей числами сочетаний  $C_n^k$ . Мы получим их, решая следующую задачу.

**14.** *В ряд расположены 5 лампочек. Сколькими способами можно зажечь  $k$  из них (для каждого  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  и  $5$ )? А если лампочек  $n$ ?*

**Решение.** 0 ламп можно «зажечь» только одним способом – ни одну не зажигать. 1 лампу из 5 можно выбрать 5 способами, 2 лампы из 5 – 10 способами (действительно, первую можно зажечь 5 способами, после этого остается 4 возможности зажечь вторую лампу; но число  $5 \cdot 4$  надо разделить пополам, ибо когда лампы горят, не ясно, какая была зажжена раньше).

Для  $k = 3$  ламп получим ответ  $5 \cdot 4 \cdot 3 / 3! = 10$ , для  $k = 4$  получим  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 / 4! = 5$ , а для  $k = 5$  – 1 способ. (Впрочем, сразу можно было сообразить, что строчка ответов 1, 5, 10, 10, 5, 1 получится симметричной: ведь случаев, когда  $k$  ламп горят и остальные  $5 - k$  не горят, столько же, сколько случаев, когда все наоборот.)

Вы, конечно, заметили, что, решая задачи 2 и 3 про Федю, мы именно так получали формулы для  $C_n^2$  и  $C_n^3$ .

Точно так же выводится и общая формула для  $C_n^k$  – числа способов зажечь  $k$  ламп из  $n$ . Первую мы выбираем из  $n$  возможностей, вторую – из  $(n - 1)$ , третью –  $(n - 2)$ , и так  $k$  раз (при этом заметьте, что  $k$ -ю лампу мы выбираем из  $n - k + 1$  варианта, а вовсе не из  $n - k$ , как можно подумать сгоряча). А

делить надо на  $k!$  – число перестановок  $k$  элементов:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Числа сочетаний  $C_n^k$  в англоязычных учебниках обозначают иначе:  $\binom{n}{k}$ . Они появляются в разных ситуациях.  $C_n^k$  – это число  $k$ -элементных подмножеств множества из  $n$  элементов; число последовательностей длины  $n$ , состоящих из  $k$  единиц и  $(n-k)$  нулей;

число путей длины  $n$  из точки  $(0, 0)$  в точку  $(k, n-k)$  по сторонам единичных клеток;

коэффициент при  $x^k$  после раскрытия скобок в выражении  $(x+1)^n$ .

Биномиальные коэффициенты удобно расположить в виде треугольника Паскаля (рис.6), где каждое число равно сумме двух стоящих над ним, что соответствует формуле  $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ .

Числа сочетаний еще понадобятся нам ниже.

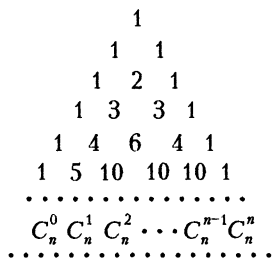


Рис. 6

### Упражнения

15. Из города  $A$  в город  $B$  ведут 4 дороги, из  $B$  в  $C$  – 6 дорог. Сколькими способами можно проехать из  $A$  в  $C$ ?

16. Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры нечетны и различны?

17. Сколькими способами можно отметить 8 полей шахматной доски, чтобы никакие два отмеченных поля не лежали ни на одной вертикали, ни на одной горизонтали?

18. Сколько всего шестизначных чисел, все цифры которых нечетные?

19. Выбирают случайным образом трехзначное нечетное число. С какой вероятностью

- а) все три цифры разные;
- б) первая цифра равна 1;
- в) первая цифра равна последней?

20. Пусть в ряд расположены  $n$  фонарей, каждый из которых горит или не горит с вероятностью  $1/2$ . Найдите вероятность того, что горят ровно  $k$  фонарей.

21. Из юго-западного угла квадратного города  $n \times n$ , разбитого улицами на единичные квадраты, выходят  $2^n$  человек. Половина идет

на север, половина – на восток. Из всех, кто дошел до очередного перекрестка, половина снова идет на север, половина – на восток. Сколько человек придет на  $k$ -й перекресток диагонали?

### Сложение и умножение вероятностей

Не всегда вероятности вычисляются по формуле  $P(A) = |A|/N$ . Иногда удастся одни вероятности вычислять через другие. Например, если даны два множества  $A$  и  $B$  (содержащиеся в  $E$ ), то число элементов объединения  $A \cup B$  можно посчитать, сложив числа элементов множеств  $A$  и  $B$  и вычтя число элементов их пересечения  $A \cap B$ :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Поделив на  $N$ , получаем для вероятностей

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (4)$$

Частный случай этой формулы – для несовместных событий  $A$  и  $B$  – формула (2).

**22.** На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?

**Решение.** Перейдем к дополнительным событиям: свет был выключен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шел 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более  $20 + 10 + 50 = 80\%$  времени. Следовательно, музыка под дождем в темноте звучала не меньше  $100 - 80 = 20\%$  времени.

В этой задаче мы воспользовались переходом от события  $A$  к дополнительному  $E \setminus A$ ,<sup>1</sup> которое для краткости часто обозначают  $\bar{A}$  (читается: «дополнение к  $A$ » или «не  $A$ »). При этом

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

**23.** Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

**Подсказка.** Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определите количество шестизначных чисел, у которых все цифры нечетны.

**24.** В классе 40% мальчиков и 60% девочек. Из мальчиков на роликовых коньках катается каждый второй, а из девочек – 30%. Какая доля учеников этого класса катается на роликовых коньках?

<sup>1</sup> Вообще, для любых двух множеств  $X$  и  $Y$  через  $X \setminus Y$  обозначают множество тех элементов из  $X$ , которые не принадлежат  $Y$ .

**Решение.** Пусть в классе  $n$  человек. Тогда мальчиков всего  $0,4n$ , а девочек  $0,6n$ . Значит, катаются  $0,5 \cdot 0,4n$  мальчиков и  $0,3 \cdot 0,6n$  девочек, так что искомая доля равна

$$\frac{0,5 \cdot 0,4n + 0,3 \cdot 0,6n}{n} = 0,5 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,38.$$

Последняя формула, если бы речь шла не о процентах и долях, а о вероятностях, называлась бы формулой полной вероятности. В общем виде она выглядит так: если  $A_1, A_2, \dots, A_r$  — полная система событий, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B) + \dots + \mathbf{P}(A_r)\mathbf{P}_{A_r}(B). \quad (5)$$

Объясним обозначения. Пусть  $A$  и  $B$  — два события (например,  $A$  — «быть мальчиком»,  $B$  — «кататься на коньках»). Тогда условной вероятностью  $\mathbf{P}_A(B)$  события  $B$  при условии  $A$  называется отношение  $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(A)$ . (В нашем примере  $\mathbf{P}_A(B) = 0,5$ ,  $\mathbf{P}_{\bar{A}}(B) = 0,3$ .)

Чтобы пояснить это определение, вспомним комбинаторное определение вероятности. Если мы желаем перейти от всего пространства  $E$  к меньшему пространству  $A$ , то следует учитывать только те элементы из  $B$ , которые содержатся в  $A$ , а их количество равно  $|A \cap B|$ . При этом  $\mathbf{P}(A \cap B) = |A \cap B|/|E|$  и  $\mathbf{P}(A) = |A|/|E|$ . Отсюда и получается формула условной вероятности

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|}.$$

Условную вероятность  $\mathbf{P}_A(B)$  обозначают и так:  $\mathbf{P}(B|A)$ . Некоторым больше нравится одно обозначение, некоторым — другое.

Часто используется такая формула, вытекающая из определения условной вероятности:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B).$$

Между прочим, поскольку в левую часть буквы  $A$  и  $B$  входят симметрично, заодно выполняется и формула

$$\mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B).$$

Из формулы (5) легко получить формулу полной вероятности:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1 \cap B) + \mathbf{P}(A_2 \cap B) + \dots + \mathbf{P}(A_r \cap B) = \\ &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B) + \dots + \mathbf{P}(A_r)\mathbf{P}_{A_r}(B). \quad (7) \end{aligned}$$

## Упражнения

25. Мне прислали две посылки. В одной из них 20% груш, 50% яблок и 30% апельсинов, а в другой – 30% груш, 10% яблок и 60% киви. Я, зажав глаза, случайным образом выбираю посылку и в ней – фрукт. Какова вероятность, что я выберу апельсин?

26. Известно, что при броске кости выпало четное число. Какова вероятность того, что это число меньше пяти?

27. Докажите, что если события  $A$  и  $B$  независимы, то и события  $A$  и  $\bar{B}$  независимы.

28. Двое друзей подкидывают три монеты и хотят вычислить вероятность того, что все три выпадут одной стороной – орлом или решкой. Первый утверждает, что эта вероятность равна  $\frac{1}{4}$ . Он рассуждает так: вероятность того, что вторая монета ляжет так же, как первая, равна  $\frac{1}{2}$ , а вероятность того, что третья монета ляжет тем же способом, вдвое меньше – т.е. равна  $\frac{1}{4}$ .

Второй утверждает, что искомая вероятность равна  $\frac{1}{2}$ . Он рассуждает так: какие-нибудь две из трех монет обязательно выпадут одной и той же стороной. Вероятность того, что и третья монета ляжет тем же способом, равна  $\frac{1}{2}$ . Кто прав?

29. Про некоторую семью известно, что там двое детей. Как-то раз мама вывела на прогулку одного (случайно выбранного) ребенка. Оказалось, что это мальчик. Что более вероятно: что второй ребенок является мальчиком или девочкой?

30 (задача Паскаля). Два одинаково искусных игрока играют в игру, не допускающую ничейного исхода. Они сделали равные ставки и условились, что тот, кто первым наберет 10 выигранных партий, получит все деньги. Игра была прервана при счете 9 : 8 и не могла быть продолжена. Как должны они разделить деньги?

## Случайная величина и среднее значение

Как мы уже говорили во введении, на практике вероятности находят, многократно повторяя опыт и вычисляя долю случаев («частоту»), в которых произошло интересующее нас событие. Например, если много раз подбросить монету, то она упадет цифрой вверх примерно в половине случаев. Такая «устойчивость частоты» при многократном повторении испытания наблюдается во многих ситуациях. Математическое объяснение этой устойчивости дал Я.Бернулли в книге «Искусство предположения», опубликованной в 1713 году. Он установил закон больших чисел. Если в каждом из  $n$  независимых испыта-

ний с одной и той же вероятностью  $p$  может произойти некоторое событие  $A$ , то количество  $Z$  появлений события  $A$  не обязано в точности равняться  $np$  и может сильно отклоняться от этой величины; но вероятности значительных отклонений малы: для

всяких положительных чисел  $\epsilon$  и  $\eta$  вероятность  $\mathbf{P}\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| > \epsilon\right)$  будет меньше  $\eta$  при всех достаточно больших  $n$ .

Более простое, чем у Бернулли, доказательство закона больших чисел получится в конце следующего параграфа из неравенства Чебышёва.

В этом разделе мы будем заниматься такой задачей. Пусть некоторое событие  $A$  происходит с вероятностью  $p$ . Какова вероятность, что за  $n$  независимых испытаний оно произойдет ровно  $k$  раз?

Сначала надо придать точный смысл словам « $n$  независимых испытаний  $A$  с одной и той же вероятностью  $p$ ». Для этого служит очень важное вероятностное пространство – так называемая *схема Бернулли*. Оно состоит из  $2^n$  элементарных событий – строк  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  из  $n$  нулей и единиц. Вероятность, приписываемая строке, в которой  $k$  единиц и  $n - k$  нулей, равна  $p^k (1 - p)^{n-k}$ . При  $p = 1/2$  получается вероятностное пространство, которое описывает  $n$  бросаний симметричной монеты и встречалось в задаче 20. Заметим, что схема Бернулли (при  $p \neq 1/2$ ) не подходит под «комбинаторное» определение вероятностного пространства  $E$ , где все «атомы» были равновероятны.

Вот более общее определение, кстати, более подходящее для практических применений.

**Определение.** Конечным вероятностным пространством называется конечное множество  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , каждому элементу  $e_i$  которого приписано неотрицательное число  $w_i$  (называемое вероятностью элементарного события  $e_i$ ), причем их сумма равна единице:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1.$$

Любому событию  $A$  (подмножеству  $A \subseteq E$ ) приписывается вероятность

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{e_i \in A} w_i.$$

Последняя формула означает, что  $\mathbf{P}(A)$  – это сумма вероятностей всех элементарных событий, из которых состоит  $A$ .

Заметим, что основные правила вычисления вероятностей (1)–(7), о которых шла речь выше, при этом сохраняются.

Далее нам потребуются другие новые понятия: случайная величина, ее распределение, ее среднее значение и т.п. Собственно, эти понятия намного старше теории вероятностей и всем хорошо знакомы: они относятся к традиционной статистике, возникшей одновременно с умением записывать числа.

**Определение.** Случайной величиной называется функция  $X$ , заданная на множестве  $E$ .

Каждому событию  $A \subseteq E$  соответствует «характеристическая» случайная величина  $\xi_A$ , принимающая значения 0 и 1:  $\xi_A(e) = 1$ , если  $e \in A$ , и  $\xi_A(e) = 0$  в противном случае (так что можно считать, что «случайная величина» – некоторое обобщение понятия «событие»).

Поскольку мы рассматриваем только конечные множества  $E$ , всякая случайная величина  $X: E \rightarrow \mathbf{R}$  может быть задана набором чисел  $X(e_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ , которые можно записать в виде таблички. Например, в задаче 1 о двух бросаниях кубика величина «сумма выпавших очков» может быть представлена такой таблицей:

Элементарное событие	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	...	(6,6)
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	...	$\frac{1}{36}$
$X$	2	3	3	4	...	12

Если вероятностное пространство состоит из большого числа элементов, то таблица становится совершенно необозримой. Между тем, обычно достаточно знать *распределение* случайной величины, т.е. перечень всех возможных ее значений  $\{x_1, \dots, x_m\}$  и вероятность  $u_j = \mathbf{P}(X = x_j)$  каждого из них. Здесь  $X = x_j$  – это событие «случайная величина  $X$  равна  $x_j$ »; его вероятность  $u_j$  – сумма  $w_i$  по всем  $e_i$ , для которых  $X(e_i) = x_j$ . События  $X = x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  образуют, очевидно, полную систему событий, так что  $u_1 + u_2 + \dots + u_m = 1$ . Распределение случайной величины полностью определяет ее основные свойства – среднее значение, величину «разброса», наличие лишь одного или нескольких наиболее вероятных значений... В примере с кубиком распределение таково:

$x_j$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$u_j$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

А в схеме Бернулли случайная величина «число единиц» — обозначим ее  $z$  — имеет *биномиальное распределение*

$$\mathbf{P}(z = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Распределение случайной величины «оценка Феди на экзамене» из задачи 4 (обозначим ее  $\Phi$ ) задано таблицей или гистограммой рисунка 4.

**Определение.** Средним значением случайной величины  $X$  называется сумма

$$\mathbf{M}(X) = \sum_{i=1}^N w_i X(e_i) = w_1 X(e_1) + w_2 X(e_2) + \dots + w_N X(e_N).$$

Зная распределение  $\mathbf{P}(X = x_j) = u_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), эту формулу можно, собрав вместе слагаемые с одинаковыми значениями  $X(e_i)$ , переписать в виде

$$\mathbf{M}(X) = \sum_{j=1}^m u_j x_j = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_m x_m.$$

Среднее значение называют также *математическим ожиданием* случайной величины.

Среднее значение характеристической функции  $\xi = \xi_A$  события  $A$ , принимающей только значения 0 и 1, равно вероятности события  $A$ :

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{P}(\xi = 0) \cdot 0 + \mathbf{P}(\xi = 1) \cdot 1 = \mathbf{P}(\xi = 1) = \mathbf{P}(A).$$

Среднее значение оценки Феди равно

$$\mathbf{M}(\Phi) \approx 0,0076 \cdot 5 + 0,0876 \cdot 4 + 0,312 \cdot 3 + 0,593 \cdot 2 \approx 2,51.$$

Среднее значение числа единиц в схеме Бернулли равно по определению

$$\mathbf{M}(Z) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \cdot k.$$

Подсчитаем эту сумму. Поскольку при  $k \geq 1$

$$C_n^k \cdot k = \frac{n!}{k!(-k)!} \cdot k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n C_{n-1}^{k-1},$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(Z) &= \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} p^k (1 - p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n p^{k-1} (1 - p)^{n-k} = np \sum_{l=0}^n p^l (1 - p)^{n-1-l}. \end{aligned}$$

По формуле бинома Ньютона сумма  $\sum_{l=0}^{n-1} p^l (1 - p)^{n-1-l}$  равна



$(p + (1 - p))^n = 1$ . Значит, среднее значение величины  $Z$  равно  $np$ .

Но гораздо проще считать это среднее значение при помощи следующего свойства.

**Теорема 1.** *Среднее значение суммы  $X + Y$  случайных величин  $X$  и  $Y$  равно сумме их средних:*

$$\mathbf{M}(X + Y) = \mathbf{M}(X) + \mathbf{M}(Y).$$

**Доказательство.** По определению,

$$\mathbf{M}(X) = w_1 X(e_1) + w_2 X(e_2) + \dots + w_N X(e_N), \quad (8)$$

$$\mathbf{M}(Y) = w_1 Y(e_1) + w_2 Y(e_2) + \dots + w_N Y(e_N). \quad (9)$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(X) + \mathbf{M}(Y) &= w_1 (X(e_1) + Y(e_1)) + \\ &+ w_2 (X(e_2) + Y(e_2)) + \dots + w_N (X(e_N) + Y(e_N)) = \mathbf{M}(X + Y). \end{aligned}$$

Разумеется, утверждение теоремы верно и для суммы нескольких случайных величин.

Чтобы применить его к нахождению  $\mathbf{M}(Z)$ , представим  $Z$  в виде суммы  $n$  случайных величин

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n,$$

где  $Z_j$  — значение  $j$ -й координаты строки  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ . Среднее значение каждого из  $n$  слагаемых равно

$$\mathbf{M}(Z_j) = p, \quad (10)$$

поэтому  $\mathbf{M}(Z) = np$ .

Для произведения средних не все так просто — не всегда математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий. Например, если случайная величина  $X$  принимает значения 1 и  $-1$  с равными вероятностями  $1/2$ , то  $\mathbf{M}(X) = 0$ , а  $\mathbf{M}(X^2) = \mathbf{M}(1) = 1$ .

**Определение.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *независимыми*, если для любых значений  $x_j$  и  $y_k$  события  $X = x_j$  и  $Y = y_k$  независимы, т.е.

$$\mathbf{P}(X = x_j, Y = y_k) = \mathbf{P}(X = x_j) \mathbf{P}(Y = y_k).$$

**Теорема 2.** *Среднее значение произведения независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  равно произведению их средних значений:*

$$\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}(X) \mathbf{M}(Y).$$

**Доказательство.** Пусть величина  $X$  принимает значения  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , а величина  $Y$  принимает значения  $y_1, y_2, \dots, y_l$ . Обозначим  $P(X = x_j) = u_j$ ,  $P(Y = y_k) = v_k$ . Тогда

$$P(X = x_j, Y = y_k) = u_j v_k,$$

так что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l P(X = x_j, Y = y_k) x_j y_k &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l u_j v_k x_j y_k = \\ &= \sum_{j=1}^m u_j x_j \cdot \sum_{k=1}^l v_k y_k = M(X)M(Y). \end{aligned}$$

### Упражнения

**31.** Двое играют в такую игру. Если при броске кости выпадает 1 или 2, то первый выигрывает у второго 5 очков; в противном случае второй выигрывает у первого 2 очка. Для кого эта игра выгодна – для первого или для второго игрока?

**32.** Я доезжаю на работу обычно либо автобусом за 20 минут, либо троллейбусом за полчаса, причем автобусом езжу вдвое чаще, чем троллейбусом. В виде исключения я раз в десять дней доезжаю на такси за 10 минут и раз в десять дней хожу пешком за 1 час. Сколько времени в день в среднем я трачу на дорогу?

**33.** Каждым ходом игрок бросает игральную кость и получает столько очков, сколько выпадет. К тому же, если выпадет шестерка, он бросает кость второй раз за тот же ход и получает дополнительно выпавшее число очков. Сколько в среднем очков игрок получает за ход?

**34.** Докажите, что если случайные величины  $X$  и  $Y$  связаны соотношением  $Y = aX + b$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные числа, то  $M(Y) = aM(X) + b$ .

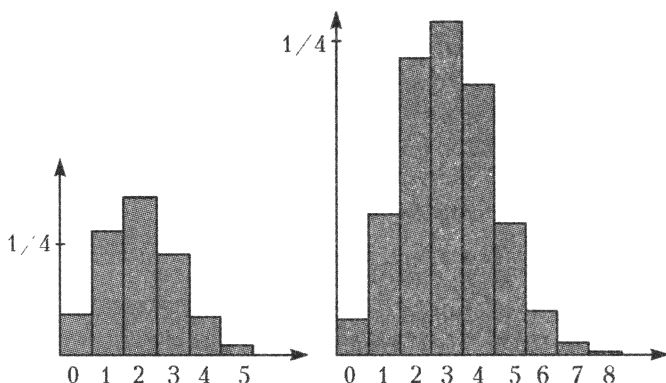


Рис. 7

**35.** Докажите, что если всегда  $X \leq Y$ , то  $\mathbf{M}(X) \leq \mathbf{M}(Y)$ .

**36.** Докажите, что если  $\mathbf{M}(X^2) \leq \mathbf{M}(X)^2$ , то  $X$  – постоянная величина.

**37.** Феде на экзамене задают а) 6; б) 9 вопросов, на каждый из которых он отвечает правильно с вероятностью  $1/3$ . Найдите вероятности, что он ответит правильно на  $k$  вопросов (соответствующие гистограммы изображены на рис.7, а, б).

### Дисперсия и неравенство Чебышёва. Закон больших чисел

Кроме среднего значения  $\mathbf{M}(X)$ , случайная величина имеет другие характеристики. Если мы знаем, что в среднем за час на остановку приходит 10 автобусов, то отсюда еще не следует, что нам не придется ждать автобуса полчаса. Рассмотрим случайную величину  $\hat{X} = X - \mathbf{M}(X)$  – отклонение  $X$  от математического ожидания (чем больше по модулю значения она имеет, тем больше «разброс» величины  $X$ ).

Разумеется, математическое ожидание величины  $\hat{X}$  равно 0. Математическое ожидание ее модуля может служить мерой разброса значений  $X$ . Но для математиков значительно более удобна другая характеристика, которую называют *дисперсией*:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(\hat{X})^2 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}(X))^2.$$

Дисперсия – это *квадрат* «характерного отклонения» величины  $X$  от ее среднего значения. Чем меньше дисперсия, тем острее (уже) гистограмма распределения.

**38.** Докажите, что

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X^2) - \mathbf{M}(X)^2.$$

А теперь – самое замечательное свойство дисперсии.

**Теорема 3.** Дисперсия суммы независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  равна сумме их дисперсий:

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}(X) + \mathbf{D}(Y).$$

**39.** Докажите эту теорему.

Теорема 3 верна, конечно, и для суммы нескольких независимых случайных величин. Отсюда ясно, что для  $n$  одинаково распределенных независимых величин (например, для числа единиц схемы Бернулли) дисперсия их суммы равна  $n\mathbf{D}$ , где  $\mathbf{D}$  – дисперсия одной величины. Значит, характерное отклонение суммы  $n$  случайных значений от ее математического ожидания

равно  $\sqrt{nD}$  («закон корня из  $n$ »), тем самым, среднее арифметическое  $n$  значений отличается от вероятности  $p$  на величину порядка  $\sqrt{D}/\sqrt{n}$ . На этом и строится доказательство закона больших чисел.

Докажите самостоятельно следующие утверждения:

**40.** Дисперсия величины  $Z$  схемы Бернулли равна  $np(1-p)$ .

**Теорема 4.** Если случайная величина  $X$  принимает только неотрицательные значения, то для любого положительного числа  $\epsilon$  выполняется неравенство

$$P(X \geq \epsilon) \leq M(X)/\epsilon.$$

**Теорема 5** (неравенство Чебышёва). Для любого положительного числа  $\epsilon$  и любой случайной величины  $X$  выполняется неравенство

$$P(\hat{X} \geq \epsilon) \leq D(X)/\epsilon.$$

**Теорема 6** (закон больших чисел). Если случайная величина  $Y$  есть сумма  $n$  независимых случайных величин, у каждой из которых среднее значение равно  $a$ , а дисперсия  $D$ , то для любого положительного числа  $\epsilon$

$$P\left(\left|\frac{Y}{n} - a\right| > \epsilon\right) < \frac{D}{n\epsilon^2}.$$

Последние теоремы типичны для теории вероятностей. Мы не можем наверняка утверждать, что результат опыта (случайная величина) или среднее арифметическое нескольких опытов отличается от истинного среднего – математического ожидания – не более чем на  $\epsilon$ , но можем быть уверены, что вероятность большого отклонения мала. Основное содержание теории вероятностей – различные неравенства, позволяющие оценивать вероятности.

Давайте посмотрим, какую оценку дает неравенство Чебышёва для 400 бросаний симметричной монеты. Вероятность  $P$  того, что число выпадений цифры отличается от 200 более чем на 20, оценивается так:

$$P < \frac{D}{400 \cdot (120)^2} = \frac{14}{400 \cdot (120)^2} = \frac{1}{4},$$

где значение  $D = 1/4$ .

На самом деле, существуют замечательные теоремы, позволяющие значительно точнее оценивать такие величины. Так, на последнем примере  $P \approx 0,05$ . Но об этом мы поговорим в следующий раз.

## РАЗБИЕНИЯ, ГС-ПЕРЕСТАНОВКИ И ДЕРЕВЬЯ

*Памяти Н.Я.Виленкина*

Школьники, серьезно интересующиеся математикой, участвующие в олимпиадах и готовые размышлять над сложными задачами, должны быть знакомы с элементами комбинаторики, одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики.

Хотя те несколько задач, которые мы ниже разбираем, не требуют предварительного изучения основ комбинаторики, мы очень советуем тем, кто встречается с комбинаторными задачами впервые, открыть учебник для физико-математических классов Н.Я.Виленкина, О.С.Ивашева-Мусатова, С.И.Шварцбурда «Алгебра и математический анализ», во второй части которого содержатся начальные сведения по комбинаторике, или замечательную книгу Н.Я.Виленкина «Комбинаторика», где на множестве разнообразных примеров объяснены характерные постановки задач и приемы рассуждений, которые встретятся в этой статье.

Начнем с формулировок трех задач, как мы скоро увидим, тесно связанных друг с другом. Вторая из них возникла в работе одного из самых известных современных специалистов по комбинаторике (автора ряда фундаментальных работ и очень хорошей книги «Перечислительная комбинаторика») Ричарда Стенли.

### Формулировки задач

**Задача о разбиениях на пары.** Сколько существует разбиений множества из  $2n$  элементов  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  на пары? (Порядок элементов внутри каждой пары, а также порядок самих пар не принимаются во внимание.)

Представив наши  $2n$  элементов точками  $1, 2, \dots, 2n$  числовой прямой, мы можем изобразить каждое такое разбиение  $n$  полуокружностями, каждая из кото-

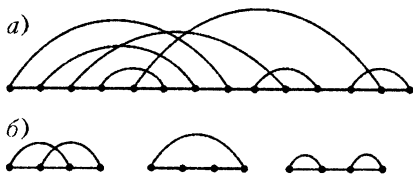


Рис. 1

Статья написана в соавторстве с Л.Когановым.

рых оканчивается в двух точках пары (рис.1,а). Например, для  $n = 2$  существует 3 различных разбиения множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  на пары (рис.1,б).

**Задача о ГС-перестановках.** Сколько существует перестановок из  $2n$  элементов  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$  (каждое  $i$  от 1 до  $n$  входит в перестановку два раза!), удовлетворяющих следующему дополнительному условию Гесселя–Стенли: для любого  $i < n$  все элементы, расположенные в перестановке между двумя вхождениями  $i$ , больше  $i$ ?

Такие перестановки (мы будем называть их ГС-перестановками) рассматривались в статье, которую опубликовали в 1978 году два американских математика – Айра Гессель и Ричард Стенли. Каждую ГС-перестановку можно изобразить так. Расставим  $2n$  точек на горизонтальной прямой, нарисуем в нижней полуплоскости  $n$  полуокружностей с концами в этих точках, не пересекающихся между собой (даже не имеющих общих концов) и расставим номера  $1, 2, \dots, n$  на полуокружностях так, чтобы полуокружность, лежащая выше другой, имела больший номер; например, рисунок 2,а изображает ГС-перестановку 13446631255772 – концы  $i$ -й полуокружности указывают, где расположены два вхождения элемента  $i$  в перестановку.

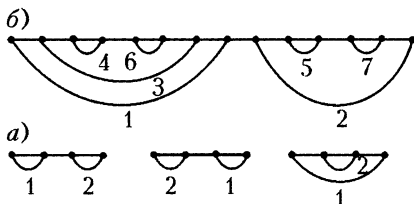


Рис. 2

На рисунке 2,б изображены все 3 возможные ГС-перестановки для  $n = 2$ .

**Задача о монотонных плоских корневых деревьях.** В теории графов (граф – это система точек – *вершин*, – некоторые пары которых соединены отрезками – *ребрами* графа) *деревом* называется связный граф без *циклов*, т.е. граф, в котором для любых двух вершин есть только один путь, ведущий из одной в другую по (разным) ребрам. Мы будем рисовать деревья, растущие вверх из корня – некоторой точки  $O$  горизонтальной прямой  $l$  – и состоящие из  $n$  ребер – стрелок: одно или несколько ребер начинаются в точке  $O$ ; из их концов, удаляясь от прямой  $l$ , могут расти еще несколько ребер, и так далее. Ребра пронумерованы числами от 1 до  $n$ , причем *монотонно*: ребра, растущие из вершины, где заканчивается ребро  $i$ , должны иметь номера, большие  $i$ . При этом длины и направления ребер не принимаются во внимание, но если из какой-то вершины выхо-

дит несколько ребер, то важен порядок, в котором они расположены на плоскости (какое – левее, а какое – правее). Сколько существует различных монотонных плоских деревьев с  $n$  ребрами? Одно такое дерево изображено на рисунке 3, а. А на рисунке 3, б изображены все 3 различные дерева для  $n = 2$ .

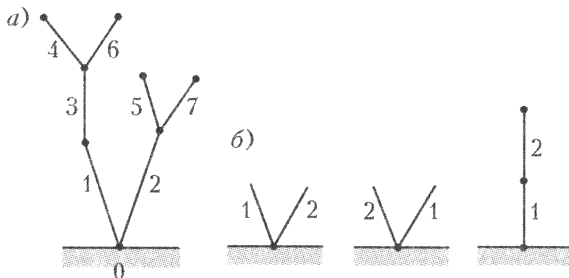


Рис. 3

Замечательно, что во всех трех этих столь разных на вид задачах один и тот же ответ – не только для  $n = 2$ , но и для любого  $n$ .

Разберем их по порядку.

### Число разбиений

Напомним сначала две основные формулы комбинаторики.

Общее число различных перестановок из  $n$  элементов  $\{1, 2, \dots, n\}$  равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n. \quad (1)$$

Это легко доказывается по индукции, например, так. Представим себе перестановку из  $n - 1$  элементов как  $n - 1$  точек на прямой, обозначенных в некотором порядке  $1, 2, \dots, n - 1$ . Эти точки делят прямую на  $n$  частей: луч слева от самой левой точки, отрезок между ней и соседней точкой, ..., луч слева от самой правой точки. Новую точку  $n$  можно поместить в каждую из этих частей. Таким образом, при переходе от  $n - 1$  к  $n$  число перестановок увеличивается в  $n$  раз. Отсюда получается формула (1).

Число  $C_n^k$  различных подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , состоящих из  $k$  элементов, равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2)$$

(при этом считается, что  $0! = 1$ ). Эту формулу легко получить из (1), пользуясь тем, что в подмножестве (в отличие от перестановок) порядок расположения элементов не принимается во внимание. Рассмотрим любую из  $n!$  перестановок элементов  $\{1, 2, \dots, n\}$  и условимся считать, что первые  $k$  элементов мы включаем в подмножество, а последние  $(n - k)$  – нет. Тогда каждое определенное подмножество будет получаться из  $k! \cdot (n - k)!$  перестановок: ведь в ней первые  $k$  элементов можно переставить  $k!$  способами и, независимо от этого, последние  $(n - k)$  элементов –  $(n - k)!$  способами (тут используется основное в комбинаторике «правило произведения»). Поэтому общее число перестановок  $n!$  равно  $C_n^k k! (n - k)!$ , откуда получается формула (2). Заметим, что в ней можно провести сокращения и записать ее так:

$$C_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)/k! = n(n-1)\dots(k+1)/(n-k)!.$$

Точно такими же рассуждениями решается и задача о числе разбиений множества из  $2n$  элементов на  $n$  (неупорядоченных) пар. Сопоставим каждой перестановке  $(i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_{2n-1}, i_{2n})$  из  $2n$  элементов  $(1, 2, \dots, n)$  такое разбиение на пары:  $(i_1, i_2)$ ,  $(i_3, i_4)$ ,  $\dots$ ,  $(i_{2n-1}, i_{2n})$ . Тогда каждое разбиение будет получаться из  $2^n n!$  перестановок: ведь в каждой паре можно (двумя способами) переставить элементы друг с другом – это дает множитель  $2^n$  – и, кроме того,  $n$  пар можно переставить как угодно между собой. Итак, ответ:

число разбиений равно

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

Это число обозначается  $(2n-1)!!$  (читается: « $2n-1$  двойной факториал»; вы, конечно, знаете, что  $n!$  читается « $n$  факториал»). Как мы и обещали, оно встретится нам еще не раз.

### Задача о ГС-перестановках

Здесь, так же как и для обычных перестановок, формула для числа  $P_{\text{ГС}}(n)$  перестановок Гесселя–Стенли легко выводится с помощью индукции. Заметим, что, как следует из ГС-условия, пара элементов  $n, n$  в перестановке из  $2n$  элементов  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$  должна стоять рядом. Представим перестановку (ГС-перестановку!) из  $2n-2$  элементов  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n-1, n-1\}$  как  $2n-2$  точек прямой, делящих ее на  $2n-1$  частей (два луча и  $2n-3$  отрезка). В любую из этих частей мы можем поместить рядом пару  $(n, n)$  и получить  $2n-1$  разных



ГС-перестановок. Таким образом, при переходе от  $n - 1$  к  $n$  число ГС-перестановок увеличивается в  $(2n - 1)$  раз. Отсюда по индукции получаем

$$P_{\text{ГС}}(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) = (2n - 1)!!.$$

Конечно, вполне естественно было бы здесь обсудить такой вопрос:

*сколько вообще существует различных перестановок – не обязательно удовлетворяющих ГС-условию – «мультимножества»  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$  из  $2n$  элементов?*

(Слово «мультимножество» означает, что некоторые элементы встречаются более одного раза – в отличие от обычного множества, где элементы считаются различными.)

Эту задачу – несложную – предлагаем решить читателям.

Мы приведем ответ на более общий вопрос: перестановок мультимножества  $\{1, 1, \dots, 1; 2, 2, \dots, 2; \dots; n, n, \dots, n\}$ , в котором  $i$  встречается  $k_i$  раз (в старой терминологии – *перестановок с повторениями*) существует

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_n)! / (k_1! k_2! \dots k_n!).$$

#### Задача о монотонных плоских деревьях

Эту задачу тоже можно решить по индукции (подумайте, в какое количество мест можно вставить последнюю  $n$ -ю ветку дерева). Но мы для разнообразия поступим иначе. Мы докажем, что число таких деревьев с  $n$  ветками равно  $(n - 1)!!$ , установив взаимно однозначное соответствие между ними и ГС-перестановками мультимножества  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$ .

Аналогичное 1-1-соответствие (или, пользуясь французским термином, *биекция*) было, по-видимому, впервые предложено в 1967 году голландским математиком Николасом Говертом де Брейном и его соавтором Б.Морсельтом для иных целей.

Представим себе, что  $n$  ветвей занумерованного плоского дерева  $D$  с корнем  $O$  – это каналы (или – притоки реки, впадающей в озеро  $O$ ). Пройдем от точки  $O$ , начав, скажем, с левого берега, вдоль всех каналов и вернемся в  $O$ , записывая последовательно номера всех встречавшихся нам каналов (рис.4). Каж-

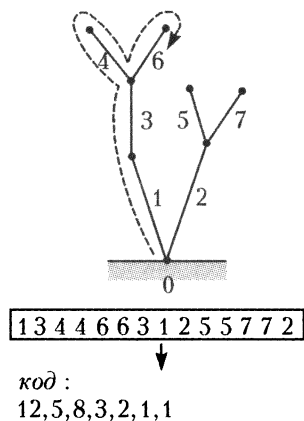


Рис. 4

дый номер встретится дважды. При этом, если нумерация монотонна, то полученная перестановка мультимножества  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$ , очевидно, будет удовлетворять ГС-условию (весь путь от того момента, когда мы прошли по левому берегу  $i$ -го канала, до того, как пришли к его правому берегу, проходит по каналам с номерами, большими  $i$ ).

Обратно, по любой ГС-перестановке номеров  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$  строится соответствующее монотонное плоское дерево с  $n$  ветвями: можно представить себе, что номера перестановки написаны в  $2n$  клетках на полоске бумаги, которую мы кладем «ребром» на плоскость, сгибаем сначала в тех местах, где рядом стоят равные номера (в частности, пара  $(n, n)$ ) и постепенно склеиваем все клетки с равными номерами.

Итак, в задаче о деревьях ответ тот же:  $(2n - 1)!!$ . Но если совпадение ответов во второй и третьей задачах мы объяснили, то с первой это совпадение выглядит достаточно случайным. Так ли это – обсудим в следующем разделе.

### Универсальная биекция

Слово «биекция» нам уже встречалось – это точный математический термин, означающий взаимно однозначное соответствие между двумя множествами  $X$  и  $Y$ , т.е. отображение  $X$  на  $Y$ , при котором каждому элементу  $x \in X$  ставится в соответствие элемент  $y \in Y$ . Разумеется, между любыми двумя конечными множествами  $X$  и  $Y$  с одинаковым числом элементов  $N$  можно установить какую-либо биекцию.

**Упражнение.** Докажите, что это можно сделать  $N!$  способами.

Но когда речь идет о сложных комбинаторных объектах, *какая-то* биекция не слишком интересна. Замечательно, если правило, устанавливающее соответствие, достаточно простое, позволяющее по данному  $x \in X$  сразу найти соответствующее ему  $y \in Y$  и обратно, по  $y$  найти  $x$ . Это и есть (не совсем строго математическое) свойство, которое мы подразумеваем, говоря об универсальной биекции.

Приведем пример.

Каждому подмножеству множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  можно сопоставить его «код» – строку длины  $n$  из цифр 0 или 1 (на  $i$ -м месте стоит 1, если  $i$  входит в подмножество, и 0 – если нет). Это – хорошо известная универсальная биекция. Она позволяет даже занумеровать все  $2^n$  подмножеств: ведь «код» – строку из 0 и 1 – можно рассматривать как двоичную запись числа от 0 до  $2^n - 1$ .

Вернемся теперь к задаче 1. Мы покажем, что в этой задаче – как и в задаче 2 – можно построить естественную биекцию с множеством наборов  $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$ , где  $\alpha_i$  принимает  $2i - 1$  значений  $1, 2, \dots, 2n - 1$  (для каждого  $i$  от 1 до  $n$ ; нам удобнее нумеровать  $\alpha_i$  не слева направо, как принято обычно, а в обратном порядке, как в языке иврит). В этом нам помогут *диаграммы связей* – полуокружности, с помощью которых мы иллюстрировали формулировки задач.

Итак, пусть у нас есть  $2n$  элементов – точек по горизонтальной прямой – и заодно их разбиение на пары (см. рис. 1, а; удобно на каждой полуокружности поставить стрелку, идущую справа налево). Рассмотрим самый правый элемент и найдем номер  $\alpha_n \leq 2n - 1$  того элемента, с которым он составляет пару (мы считаем, что элементы занумерованы по порядку слева направо:  $1, 2, \dots, 2n - 1$ ). Уберем эту пару. Останется  $2n - 2$  элемента. Рассмотрим самый правый из них; остальные (пропустив, если нужно, «бывший»  $\alpha_n$ ) занумеруем по порядку:  $1, 2, \dots, 2n - 3$  и найдем номер  $\alpha_{n-1} \leq 2n - 3$  элемента, к которому идет полуокружность от самого правого. Удалим и эту пару, и так далее. Так получается набор  $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$ , по которому, очевидно, однозначно восстанавливается разбиение на пары.

То же множество наборов  $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$  еще проще сопоставить ГС-перестановкам: по существу, это и делалось в индуктивном решении задачи. Чтобы выбрать место для пары  $(n, n)$  в перестановке номеров  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n - 1, n - 1\}$ , стоящих возле  $2n - 2$  точек прямой, мы выбираем один из  $2n - 1$  лучей и интервалов, на которые эти точки делят прямую. Можно занумеровать эти интервалы слева направо:  $1, 2, \dots, 2n - 1$  и найти номер  $\alpha_n$  соответствующего интервала. В оставшейся ГС-перестановке из  $2n - 2$  элементов точно так же выбирается (после выбрасывания пары  $(n, n)$ ) номер  $\alpha_{n-1}$ , задающий место для пары  $(n - 1, n - 1)$ , и так далее (см. «код» на рис. 4).

Ясно, что по «коду»  $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$  мы легко строим и ГС-перестановку, и разбиение; тем самым, мы установили между ними универсальную биекцию.

Заметим, что отыскание красивых 1-1-соответствий в комбинаторике – задача даже более глубокая, чем поиск простых явных формул для количества объектов. Ведь очень часто таких формул просто нет.

Не менее сильным инструментом в изучении комбинаторных объектов служат *производящие функции*.

Если у нас есть некоторая последовательность  $a_m$  (скажем, выражающая количество каких-то объектов в зависимости от

параметра  $m \geq 0$ ), то производящая функция – это формальный степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots$$

Например, для числа  $C_{100}^m$   $m$ -элементного подмножества множества  $\{1, 2, \dots, 100\}$  производящая функция будет просто многочленом:

$$C_{100}^0 + C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 + \dots + C_{100}^{100}x^{100} = (1+x)^{100}.$$

Когда, как в этом примере, производящую функцию удастся «свернуть» или выразить через другие функции, нередко можно получить массу интересных соотношений между коэффициентами или хорошие оценки для них. Разумеется, в задачах с несколькими параметрами используются и производящие функции от нескольких переменных, например,

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^n C_n^m x^m y^n = \sum_{n \geq 0} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

В заключительном разделе мы приведем еще несколько трудных задач, где участвуют производящие функции для перечисляющих последовательностей, связанных с ГС-перестановками и другими аналогичными комбинациями.

### Задачи «на десерт»

Раньше мы интересовались всевозможными разбиениями множества из  $2n$  элементов на пары. Теперь же поставим более общий вопрос о разбиении произвольного множества из  $p$  элементов на  $q$  блоков без каких-либо специальных ограничений. Пусть  $S(p, q)$  – число таких разбиений.

Вернемся к ГС-перестановкам.

Назовем *спадом* (или спуском, или десантом) пару соседних чисел, если левое из этих чисел больше правого. Пусть  $B_{k,i}$  – число ГС-перестановок с ровно  $i-1$  спуском на мультимножестве  $\{11, 22, \dots, kk\}$ .

**Задача 1** (очень трудная). Докажите, что

$$(1-x)^{2k+1} \sum_{n=1}^{\infty} S(n+k, n) x^n = \sum_{i=1}^k B_{k,i} x^i.$$

(Напомним, что степенные ряды перемножаются так же, как и многочлены, которые тоже можно рассматривать как ряды, коэффициенты которых, начиная с некоторого места, равны 0.)

**Задача 2** (трудная). Докажите тождество, установленное недавно В.С.Шевелевым:

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{m-j} C_{2m}^{m-j} S(m+j, j) = (2m-1)!!$$

**Задача 3** (менее трудная, чем задачи 1 и 2). Докажите, что  $S(n+k, n)$  является многочленом от  $n$  степени  $2k$ , и найдите коэффициент этого многочлена при  $n^{2k}$ .

(Ответ:  $\frac{(2k-1)!!}{(2k)!}$ .)

Мы надеемся, что нам удалось познакомить вас с «кухней» современной перечислительной комбинаторики. На этой «кухне» мы встретились с несколькими замечательными математиками, а в заключение у нас появилась возможность попробовать собственные силы в увлекательной науке, имя которой – комбинаторика.

### Литература

1. *Н.Я.Виленкин, О.С.Ивашев Мусатов, С.И.Шварцбург*. Алгебра и математический анализ (для школ с углубленным изучением математики). Часть II. – М.: Просвещение, 1990.

2. *Ю.Ионин*. Сколько вариантов? – Приложение к журналу «Квант» №2/94.

3. *Г.Радемахер, О.Теплиц*. Числа и фигуры. – М.: Наука, 1966. Раздел 9 (см. также разделы 7,2 и 11).

4. *И.С.Соминский*. Элементарная алгебра (дополнительный курс). Изд. 3-е (или любое другое). – М.: Наука, 1967. Глава 2.

5. *В.А.Кречмар*. Задачник по алгебре (любое издание). Раздел 9. Задачи 36–40.

Про угол  $\frac{\pi}{7}$  и  $\sqrt{7}$

1. а) Можно воспользоваться тождеством

$$xy + yz + zx = \frac{1}{2} \left( (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \right)$$

и равенством (2) статьи.

в) Воспользуйтесь формулами Виета.

г) Докажите, что  $P_3(t)$  нельзя представить в виде произведения многочленов степени больше 0 с рациональными коэффициентами. Выведите отсюда, что для любого многочлена  $Q(t)$  степени меньше 3 с рациональными коэффициентами существуют многочлены  $f(t)$  и  $g(t)$  такие, что  $f(t)P_3(t) + g(t)Q(t) = 1$ .

3. При  $z \neq 1$  обе части тождествами равны  $\frac{z^n - 1}{z - 1}$ .

5.  $n^{n/2}$ .

7. а) Воспользуйтесь теоремой синусов.

б)  $BC = BD + DE + EC$ .

8. а) Заметив, что  $\angle A'_2 A_0 C = \frac{\pi}{2}$ , спроектируйте  $B$  на  $A'_2 A_0$ . Пользуясь равенствами  $A_0 B' = \operatorname{tg} 3\eta$ ,  $A_0 A'_2 = 4 \sin \eta$ , запишите теорему Пифагора для  $A'_2 B' B$ . б) Найдите  $A_2 B$  по теореме косинусов из  $A_2 BC$ .

9. б) Соедините вершины треугольника с центром круга и воспользуйтесь аддитивностью площади.

в)  $2(\sin \eta + \sin 2\eta + \sin 4\eta) = \operatorname{tg} 3\eta$ .

10. а) См. 6,а). Другой способ: решить вначале 10,б).

б) Один способ: преобразовать (6). Другой способ: домножить многочлен 10,а) на «сопряженный». Третий способ: вспомнить, что  $\eta$  является корнем уравнения  $\sin 3x = \sin 4x$ . Еще один способ: вспомнить о треугольнике задачи 7. (Выпишите для начала соотношение между сторонами треугольника, не обязательно равнобедренного, в котором один угол вдвое больше другого.) Наконец, самый мудрый способ: раскрыть скобки в левой части равенства  $(\cos x + i \sin x)^7 = \cos 7x + i \sin 7x$  и приравнять  $\sin 7x$  к коэффициенту при  $i$  слева. Этот коэффициент — многочлен седьмой степени от  $t = \sin x$  с одним нулевым

корнем. в) Положительный корень а) – единственный;  $(-v)$  – не корень. г) Не существует. Многочлен

$$P_6(t) = 64t^6 - 112t^4 + 56t^2 - 7$$

нельзя представить в виде произведения двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами. Это следует из известного критерия Эйзенштейна, его формулировка – равно как и доказательство более общего критерия – приведена в решении задачи М1419 («Квант» №4 за 1994 г., с.23). Значит, многочлен не разлагается и в произведение многочленов с рациональными коэффициентами – докажите эту лемму Гаусса. Завершить доказательство можно по схеме 1,г).

11. Постройте многочлен с целыми коэффициентами  $P_{10}(t)$  с корнем  $\sin \frac{\pi}{11}$ . Для этого посмотрите на последнее указание к 10,б): 11 тоже нечетное число, поэтому все получится так же. А теперь преобразуйте равенство задачи к виду  $P_{10}(\sin \pi/11) = 0$ . Можно ли решить проще?

### Посчитаем вероятности

5. Поскольку  $20 = 30 - 10$ , гистограмма получается отражением из гистограммы, изображенной на рисунке 4 в статье.

6.  $20 \cdot 19 = 380$  писем.

7.  $C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$  партий.

8. Всего двузначных чисел 90. Из них цифра десятков больше цифры единиц у 45 чисел, обе цифры равны у 9 чисел. На 9 делятся 10 двузначных чисел. Значит, вероятности равны а)  $1/2$ ; б)  $1/10$ ; в)  $1/9$ .

17.  $8!$  способов.

18.  $5^6$  чисел.

19. а)  $5 \cdot 4 \cdot 3/5^3$ ; б)  $1/5$ ; в)  $1/5$ .

20.  $C_n^k \cdot 2^n$ .

30. В отношении 3 : 1. Указание. Вообразим, что они сыграли еще одну партию. С вероятностью  $1/2$  ее выиграет первый игрок и вероятностью  $1/2$  – второй. Во втором случае придется играть еще одну партию, которую с вероятностью  $1/2$  выиграет второй игрок.

## СТАТЬИ Н.Б. ВАСИЛЬЕВА В ЖУРНАЛЕ «КВАНТ»

---

- 1970 г. **Кривые дракона** (в соавторстве с В.Гутенмахером), №2, с. 36; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- Метрические пространства**, №10, с. 11; повторно опубликовано в №1 за 1990 г. а также в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- 1972 г. **Расстановка кубиков**, №4, с. 4; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н. Вагутен), №6, с. 30; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- 1973 г. **Числа  $C_n^k$ , многочлены, последовательности** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н. Вагутен), №2, с. 27; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №5/97 («Задачник «Кванта», вып. 3).
- Упаковка квадратов** (в соавторстве с Г.Гальпериным), №4, с. 35.
- Последовательность прыжков**, №11, с. 25; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- 1974 г. **Задачи о графах, или Сказка «Иван-Царевич и Серый Волк»** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н. Вагутен), №11, с. 23.
- Семейство параллельных  $n$ -угольников**, №11, с. 32; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №1/98 («Математический кружок», вып. 1).
- Вокруг формулы Пика**, №12, с. 39.
- 1975 г. **Ближние дроби** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н. Вагутен), №8, с. 33.
- 1976 г. **Сложение фигур**, №4, с. 22; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №1/98 («Математический кружок», вып. 1).
- 1977 г. **Плавные последовательности** (в соавторстве с А.Толпыго), №6, с. 30; повторно опубликовано в Приложении к журналу



«Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).

- 1979 г. **Арифметические препятствия** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом Н. Вагутен), №3, с. 22; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- 1980 г. **Сопряженные числа** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом Н. Вагутен), №2, с. 26.
- 1981 г. **Формула площади** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом Н. Вагутен), №4, с. 17.  
**Рассмотрим разность** (в соавторстве с Т.Маликовым), №6, с. 27.
- 1982 г. **Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения** (в соавторстве с А.Зелевинским), №1, с. 12; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- 1983 г. **Арифметика и принципы подсчета** (в соавторстве с В.Гутенмахером), №1, с. 30; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №2/94 («Школа в «Кванте»).
- 1985 г. **Пары чисел и действия с ними** (в соавторстве с В.Гутенмахером), №1, с. 19; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).  
**Задача о восьми точках**, №3, с. 39.
- 1986 г. **Комбинаторика – многочлены – вероятность** (в соавторстве с В.Гутенмахером), №1, с. 19; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- 1987 г. **Гексаграммы Паскаля и кубические кривые**, №8, с. 2; повторно опубликовано в Приложении к журналу «Квант» №6/98 (Н.Б.Васильев. Избранные статьи).
- 1989 г. **Средние линии** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н. Вагутен), №6, с. 46.  
**Правильные многоугольники и повороты** (в соавторстве с В.Гутенмахером, опубликовано под псевдонимом В.Н.Вагутен), №10, с. 46.
- 1991 г. **Геометрические вероятности**, №1, с. 47.
- 1995 г. **Вокруг уравнения Маркова** (в соавторстве с В.Сендеровым и А.Скопенковым), №6, с. 36.
- 1996 г. **Про угол  $\frac{\pi}{7}$  и  $\sqrt{7}$**  (в соавторстве с В.Сендеровым), №2, с. 20.
- 1997 г. **Посчитаем вероятности** (в соавторстве с А.Спиваком), №4, с. 31.  
**Разбиения, ГС-перестановки и деревья** (в соавторстве с Л.Когановым), №6, с. 2.

## СОДЕРЖАНИЕ

---

Формула площади .....	3
Рассмотрим разность .....	10
Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения .....	18
Арифметика и принципы подсчета .....	31
Пары чисел и действия с ними .....	41
Задача о восьми точках .....	54
Комбинаторика – многочлены – вероятность .....	59
Гексаграммы Паскаля и кубические кривые .....	69
Средние линии .....	82
Правильные многогранники и повороты .....	90
Геометрические вероятности .....	98
Вокруг уравнения Маркова .....	108
Про угол $\frac{\pi}{7}$ и $\sqrt{7}$ .....	115
Посчитаем вероятности .....	120
Разбиения, ГС-перестановки и деревья .....	140
Отеты, указания, решения .....	149
Статьи Н.Б. Васильева в журнале «Квант» .....	151

*Николай Борисович Васильев*

## **СТАТЬИ ИЗ ЖУРНАЛА «КВАНТ»**

*Часть 2*

Библиотечка «Квант». Выпуск 126  
Приложение к журналу «Квант» №2/2013

Редактор *А.Ю.Котова*  
Обложка *А.Е.Пацхверия*  
Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*  
Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская  
Печать офсетная. Объем 5 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.  
Заказ № 4791

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»  
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: [math@kvantjournal](mailto:math@kvantjournal), [phys@kvantjournal](mailto:phys@kvantjournal)

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»  
Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>

## ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

---

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками

34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков.* Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов.* Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин.* Как превращаются вещества
37. *Г.С.Воронов.* Штурм термоядерной крепости
38. *А.Д.Чернин.* Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев.* Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич.* Физика вокруг нас
41. *Г.А.Звенигородский.* Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов.* Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов.* Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский.* Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь.*  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ... Z: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин.* Пузыри
47. *Л.С.Марочник.* Свидание с кометой
48. *А.Т.Филиппов.* Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов.* Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис.* Физика в ванне
52. *В.М.Липунов.* В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин.* Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин.* Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов.* Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин.* Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази.* Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин.* Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский.* Геометрия масс
62. *Р.Фейнман.* Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов.* Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров.* Математика – наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин.* Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман.* КЭД – странная теория света и вещества
67. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов.* Драма идей в познании природы
68. *И.Д.Новиков.* Как взорвалась Вселенная
69. *М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева.* Электричество в живых организмах
70. *А.Л.Стасенко.* Физика полета

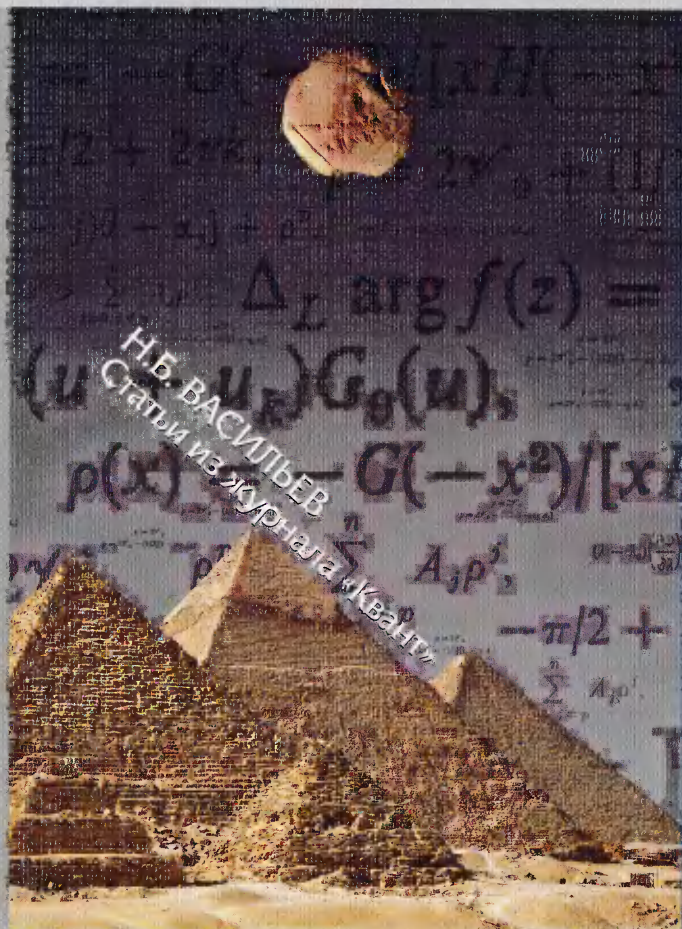
71. *А.С.Штейнберг*. Репортаж из мира сплавов
72. *В.Р.Полищук*. Как исследуют вещества
73. *Л.Кэрролл*. Логическая игра
74. *А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов*. Физика в мире полимеров
75. *А.Б.Мигдал*. Квантовая физика для больших и маленьких
76. *В.С.Гетман*. Внуки Солнца
77. *Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков*. Математические бильярды
78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнзидиг, Д.Хоньек, К.Райли*. Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Сморodinский*. Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония

108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков*. Лазер – новый источник света
111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал*. Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
114. *С.В.Коновалихин*. Сборник качественных задач по физике
115. *Е.Я.Гук*. Математика и шахматы
116. *Л.К.Белопухов*. Физика внезапного
117. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1
118. Задачник «Кванта». Физика. Часть 1
119. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2
120. Задачник «Кванта». Физика. Часть 2
121. *Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом*. Заочные математические олимпиады
122. *А.З.Долгинов*. Строение материи: от атомов до Вселенной
123. Задачник «Кванта». Физика. Часть 3
124. *А.Толпыго*. 130 нестандартных задач.
125. *Н.Б.Васильев*. Статьи из журнала «Квант». Часть 1

Индекс 90964



# Библиотечка КВАНТ



ВЫПУСК

# 126